Análisis Matemático

Segunda edición

T. M. Apostol

EDITORIAL REVERTÉ

Título de la obra original:
Mathematical Analysis

Edición original en lengua inglesa publicada por:
Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Massachusetts, U.S.A.

Versión española por:
Dr. José Pla Carrera
Doctor en Matemáticas
Profesor de la Facultad de Matemáticas en la Universidad de Barcelona

Revisada por:
Dr. Enrique Linés Escardó
Catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid

Propiedad de:
EDITORIAL REVERTÉ, S. A.
Loreto, 13-15, Local B
08029 Barcelona
Tel: (34) 93 419 33 36
Fax: (34) 93 419 51 89
e-mail: reverte@reverte.com
www.reverte.com

REIMPRESIÓN: ABRIL DE 2006

Edición en español

ISBN: 84-291-5004-8
Depósito legal: B-17304-2006

Impreso en España - Printed in Spain

Impresión: Domingraf Impressors

Indice analítico

Análisis matemático

CAPÍTULO 1

El sistema de los números reales y el de los complejos

1.1 INTRODUCCIÓN

El Análisis matemático estudia conceptos relacionados de alguna manera con los números reales; por ello empezaremos nuestro estudio del Análisis con una discusión del sistema de los números reales.

Existen diversos métodos para introducir los números reales. Uno de ellos parte de los enteros positivos 1, 2, 3, ..., que considera conceptos no definidos, utilizándolos para construir un sistema más amplio, los *números racionales* positivos (cocientes de enteros positivos), los negativos y el cero. Los números racionales son utilizados, a su vez, para construir los *números irracionales*, números reales como $\sqrt{2}$ y π, que no son racionales. El sistema de los números reales lo constituye la reunión de los números racionales e irracionales.

A pesar de que estas cuestiones constituyen una parte importante de los fundamentos de la Matemática, no las describiremos aquí con detalle. Es un hecho que, en la mayor parte del Análisis, nos interesarán solamente las *propiedades* de los números reales antes que los métodos utilizados para construirlos. Por lo tanto, consideraremos los números reales mismos como objetos no definidos, sometidos a ciertos axiomas de los que extraeremos ulteriores propiedades. Dado que el lector está, probablemente, familiarizado con la mayoría de las propiedades de los números reales que consideraremos en las páginas que siguen, la exposición será más bien breve. Su propósito es examinar las características más importantes y persuadir al lector de que, de ser necesario, todas las propiedades se podrían deducir a partir de los axiomas. Tratamientos más detallados podrán hallarse en las referencias del final de este capítulo.

Por conveniencia usaremos la notación y la terminología de la teoría de conjuntos elemental. Supongamos que S designa un conjunto (una colección de objetos). La notación $x \in S$ significa que x está en el conjunto S, escribiendo $x \notin S$ para indicar que x no está en S.

Un conjunto S es un *subconjunto* de T si cada elemento de S está también en T. Lo indicaremos escribiendo $S \subseteq T$. Un conjunto es *no vacío* si contiene, por lo menos, un elemento.

Suponemos que existe un conjunto no vacío **R** de elementos, llamados números reales, que satisfacen los diez axiomas enumerados a continuación. Los axiomas se clasifican de manera natural en tres grupos a los que nos referiremos como *axiomas de cuerpo, axiomas de orden* y *axioma de completitud* (llamado también *axioma del supremo* o *axioma de continuidad*).

1.2 LOS AXIOMAS DE CUERPO

Junto con el conjunto **R** de los números reales admitimos la existencia de dos operaciones, llamadas *suma* y *multiplicación*, tales que, para cada par de números reales x e y, la *suma* $x + y$ y el *producto* xy son números reales determinados unívocamente por x e y, satisfaciendo los siguientes axiomas. (En los axiomas que a continuación se exponen, x, y, z representan números reales arbitrarios en tanto no se precise lo contrario.)

Axioma 1. $x + y = y + x, \ xy = yx$ *(leyes conmutativas).*

Axioma 2. $x + (y + z) = (x + y) + z, \ x(yz) = (xy)z$ *(leyes asociativas).*

Axioma 3. $x(y + z) = xy + xz$ *(ley distributiva).*

Axioma 4. *Dados dos números reales cualesquiera x e y, existe un número real z tal que $x + z = y$. Dicho número z se designará por $y - x$; el número $x - x$ se designará por 0. (Se puede demostrar que 0 es independiente de x.) Escribiremos $-x$ en vez de $0 - x$ y al número $-x$ lo llamaremos opuesto de x.*

Axioma 5. *Existe, por lo menos, un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales con $x \neq 0$, entonces existe un número z tal que $xz = y$. Dicho número z se desginará por y/x; el número x/x se designará por 1 y puede demostrarse que es independiente de x. Escribiremos x^{-1} en vez de $1/x$ si $x \neq 0$ y a x^{-1} lo llamaremos recíproco o inverso de x.*

De estos axiomas pueden deducirse todas las leyes usuales de la Aritmética; por ejemplo, $-(-x) = x$, $(x^{-1})^{-1} = x$, $-(x - y) = y - x$, $x - y = x + (-y)$, etc. (Para un desarrollo más detallado, ver Referencia 1.1.)

1.3 LOS AXIOMAS DE ORDEN

Suponemos también la existencia de una relación $<$ que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los axiomas siguientes:

Axioma 6. *Se verifica una y sólo una de las relaciones* $x = y$, $x < y$, $x > y$.

NOTA. $x > y$ significa lo mismo que $y < x$.

Axioma 7. *Si* $x < y$, *entonces, para cada* z, *es* $x + z < y + z$.

Axioma 8. *Si* $x > 0$ *e* $y > 0$, *entonces* $xy > 0$.

Axioma 9. *Si* $x > y$ *e* $y > z$, *entonces* $x > z$.

NOTA. Un número real x se llama *positivo* si $x > 0$ y *negativo* si $x < 0$. Designaremos por $\mathbf{R}^+$ el conjunto de todos los números reales positivos y por $\mathbf{R}^-$ el conjunto de todos los números reales negativos.

De estos axiomas pueden deducirse las reglas usuales que rigen las operaciones con desigualdades. Por ejemplo, si tenemos que $x < y$, entonces $xz < yz$ si z es positivo, mientras que $xz > yz$ si z es negativo. Además, si $x > y$ y $z > w$ con y y w positivos, entonces $xz > yw$. (Para una discusión más detallada de estas reglas ver Referencia 1.1.)

NOTA. El simbolismo $x \leq y$ se utiliza para abreviar la afirmación:

$$\text{“}x < y \qquad \text{o} \qquad x = y.\text{”}$$

Resulta, pues, que $2 \leq 3$ ya que $2 < 3$; y $2 \leq 2$ ya que $2 = 2$. El símbolo $\geq$ se utiliza de forma análoga. Un número real x se llama *no negativo* si $x \geq 0$. Un par simultáneo de desigualdades tales como $x < y$, $y < z$ se abrevia por medio de la expresión $x < y < z$.

El teorema que sigue, que no es más que una consecuencia inmediata de los axiomas precedentes, se utiliza a menudo en las demostraciones del Análisis.

Teorema 1.1. *Sean* a *y* b *números reales tales que*

$$a \leq b + \varepsilon \text{ para cada } \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Entonces $a \leq b$.

Demostración. Si $b < a$, entonces la desigualdad (1) no se satisface para $\varepsilon = (a - b)/2$ puesto que

$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a.$$

Por lo tanto, por el axioma 6, resulta que $a \leq b$.

El axioma 10, axioma de completitud, será enunciado en la sección 1.11.

1.4. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Los números reales son, a menudo, representados geométricamente como puntos de una recta (denominada *recta real* o *eje real*). Se elige un punto para que represente el 0 y otro a la derecha del 0 para que represente el 1, como muestra la Fig. 1.1. Esta elección determina la escala. Con un conjunto apropiado de axiomas para la Geometría euclídea a cada punto de la recta real corresponde un número real y uno sólo y, recíprocamente, cada número real está representado por un punto de la recta real y uno solo. Es usual referirse al *punto* x en vez de referirse al punto correspondiente al número real x.

Figura 1.1

La relación de orden admite una interpretación geométrica simple. Si $x < y$, el punto x está a la izquierda del punto y, como muestra la figura 1.1. Los números positivos están a la derecha del 0 y los números negativos están a la izquierda del 0. Si $a < b$, un punto x satisface las desigualdades $a < x < b$ si, y sólo si, x está *entre* a y b.

1.5 INTERVALOS

El conjunto de todos los puntos comprendidos entre a y b se denomina *intervalo*. A menudo es importante distinguir entre los intervalos que incluyen sus extremos y los intervalos que no los incluyen.

NOTACIÓN. La notación $\{x : x \text{ verifica } P\}$ designa el conjunto de todos los números reales x tales que satisfacen la propiedad P.

Definición 1.2. *Supongamos $a < b$. El intervalo abierto (a, b) se define por*

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}.$$

El intervalo cerrado $[a, b]$ es el conjunto $\{x : a \leq x \leq b\}$. Los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ se definen análogamente utilizando, respectivamente, las desigualdades $a < x \leq b$ y $a \leq x < b$. Los intervalos infinitos se definen como sigue:

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}, \qquad [a, +\infty) = \{x : x \geq a\},$$

1.7 TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓN ÚNICA PARA ENTEROS

Si n y d son enteros y si $n = cd$ para algún entero c, diremos que d es un *divisor* de n, o que n es un *múltiplo* de d, y escribiremos $d|n$ (se lee: d divide a n). Un entero n es *primo* si $n > 1$ y si los únicos divisores positivos de n son 1 y n. Si $n > 1$ y n no es primo, entonces n es *compuesto*. El entero 1 no es ni primo ni compuesto.

Esta sección expone algunos resultados elementales acerca de la descomposición de enteros, culminando con el *teorema de descomposición única*, llamado también *el teorema fundamental de la Aritmética.*

El teorema fundamental establece que (1) cada entero $n > 1$ puede ser representado como producto de factores primos y que (2) esta descomposición es única, salvo en el orden de los factores. Es fácil probar la parte (1).

Teorema 1.5. *Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos.*

Demostración. Utilizaremos la inducción sobre n. El teorema se verifica trivialmente para $n = 2$. Supongamos que es cierto para cada entero k con $1 < k < n$. Si n no es primo, admite un divisor d con $1 < d < n$. Por lo tanto, $n = cd$, con $1 < c < n$. Puesto que tanto c como d son $< n$, cada uno es primo o es producto de primos; luego n es un producto de primos.

Antes de probar la parte (2), la unicidad de la descomposición, introduciremos otros conceptos.

Si $d|a$ y $d|b$, diremos que d es un *divisor común* de a y b. El teorema que sigue demuestra que cada par de enteros a y b posee un divisor común que es combinación lineal de a y de b.

Teorema 1.6. *Cada par de enteros a y b admite un divisor común d de la forma*

$$d = ax + by$$

donde x e y son enteros. Además, cada divisor común de a y b divide a d.

Demostración. Supongamos primeramente que $a \geq 0$ y $b \geq 0$ y procedamos por inducción sobre $n = a + b$. Si $n = 0$, entonces $a = b = 0$ y podemos tomar $d = 0$ con $x = y = 0$. Supongamos entonces que el teorema ha sido probado para $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Por simetría podemos suponer $a \geq b$. Si $b = 0$, entonces $d = a$, $x = 1$, $y = 0$. Si $b \geq 1$ podemos aplicar la hipótesis de inducción a $a - b$ y a b, ya que su suma es $a = n - b \leq n - 1$. Por lo tanto existe un divisor común d de $a - b$ y b de la forma $d = (a - b)x + by$. Este entero d

índices de las q, si es necesario, se puede suponer p_1/q_1. Por lo tanto, $p_1 = q_1$ ya que tanto p_1 como q_1 son primos. En (2) simplificamos p_1 en ambos miembros y obtenemos

$$\frac{n}{p_1} = p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_t.$$

Como n es compuesto, $1 < n/p_1 < n$; luego por la hipótesis de inducción las dos descomposiciones de n/p_1 son idénticas, si se prescinde del orden de los factores. Por lo tanto, lo mismo es cierto para (2) y la demostración está terminada.

1.8 LOS NÚMEROS RACIONALES

Los cocientes de enteros a/b (donde $b \neq 0$) se llamarán *números racionales*. Por ejemplo, $1/2$, $-7/5$, y 6 son números racionales. El conjunto de los números racionales, que designaremos por **Q**, contiene a **Z** como subconjunto. Observe el lector que todos los axiomas de cuerpo y todos los axiomas de orden se verifican en **Q**.

Suponemos que el lector está familiarizado con ciertas propiedades elementales de los números racionales. Por ejemplo, si a y b son racionales, su media $(a + b)/2$ también lo es y está comprendida entre a y b. Así pues, entre dos números racionales hay una infinidad de números racionales, lo cual implica que, dado un número racional cualquiera, no sea posible hablar del número racional «inmediato superior».

1.9 LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Los números reales que no son racionales se denominan *irracionales*. Por ejemplo, los números $\sqrt{2}$, e, π y e^π son irracionales.

En general no es fácil probar que un cierto número particular es irracional. No existe ninguna demostración simple de la irracionalidad de e^π, por ejemplo. Sin embargo, la irracionalidad de números tales como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ no es excesivamente difícil de establecer y, de hecho, probaremos fácilmente el siguiente:

Teorema 1.10. *Si n es un entero positivo que no sea un cuadrado perfecto, entonces $\sqrt{n}$ es irracional.*

Demostración. Suponemos en primer lugar que n no admite ningún divisor > 1 que sea cuadrado perfecto. Si admitimos que $\sqrt{n}$ es racional, llegamos a contradicción. Supongamos que $\sqrt{n} = a/b$, donde a y b son enteros sin divisores comunes. Entonces $nb^2 = a^2$ y, dado que el primer miembro de esta

igualdad es un múltiplo de n, también lo será a^2. Sin embargo, si a^2 es múltiplo de n, a deberá serlo ya que n no admite divisores > 1 que sean cuadrados perfectos. (Esto se ve fácilmente examinando la descomposición de a en factores primos.) Todo ello significa que $a = cn$, donde c es un entero. Entonces la ecuación $nb^2 = a^2$ se transforma en $nb^2 = c^2n^2$, o $b^2 = nc^2$. El mismo argumento prueba que b debe ser asimismo múltiplo de n. Entonces a y b serían ambos múltiplos de n, lo cual contradice el hecho de que a y b carecen de divisores comunes. Esto finaliza la demostración en el caso de que n no admita un divisor > 1 que sea cuadrado perfecto.

Si n admite un factor que sea cuadrado perfecto, podremos escribir $n = m^2k$, donde $k > 1$ y k no admite divisores > 1 que sean cuadrados perfectos. Por lo tanto $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$; y si $\sqrt{n}$ fuese racional, el número $\sqrt{k}$ sería también racional, contradiciendo lo que acabamos de demostrar.

Un tipo distinto de argumentación es preciso para probar que el número e es irracional. (Suponemos cierta familiaridad con la exponencial e^x del Cálculo elemental y su representación como serie infinita.)

Teorema 1.11. *Si* $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^n/n! + \dots$, *entonces el número e es irracional.*

Demostración. Probaremos que e^{-1} es irracional. La serie e^{-1} es una serie alternada con términos que decrecen constantemente en valor absoluto. En tales series el error cometido al cortar la serie por el n-ésimo término tiene el signo algebraico del primer término que se desprecia y, en valor absoluto, es menor que el del primer término que se desprecia. Por lo tanto, si $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$, tenemos la desigualdad

$$0 < e^{-1} - s_{2k-1} < \frac{1}{(2k)!},$$

de la que se obtiene

$$0 < (2k - 1)!\,(e^{-1} - s_{2k-1}) < \frac{1}{2k} \leq \frac{1}{2}, \tag{3}$$

para todo entero $k \geq 1$. Ahora bien $(2k - 1)!\,s_{2k-1}$ es siempre un entero. Si e^{-1} fuese racional, entonces podríamos elegir k suficientemente grande para que $(2k - 1)!\,e^{-1}$ fuese también un entero. A causa de (3) la diferencia entre ambos enteros debería ser un número comprendido entre 0 y $\frac{1}{2}$, lo cual es imposible. Luego e^{-1} no es racional y, por tanto, e tampoco lo es.

NOTA. Para una demostración de la irracionalidad de π, ver Ejercicio 7.33.

Los antiguos griegos sabían de la existencia de los números irracionales allá por el año 500 a.C. Sin embargo, una teoría satisfactoria de tales números

no sería desarrollada hasta finales del siglo diecinueve en que tres teorías distintas son introducidas al mismo tiempo por Cantor, Dedekind y Weierstrass. En la Referencia 1.6 puede hallarse información acerca de las teorías de Dedekind y Cantor y sus equivalencias.

1.10 COTAS SUPERIORES; ELEMENTO MÁXIMO, COTA SUPERIOR MÍNIMA (SUPREMO)

Los números irracionales aparecen en Álgebra cuando se pretenden resolver ciertas ecuaciones cuadráticas. Por ejemplo, se desea un número real x tal que $x^2 = 2$. De los nueve axiomas enumerados anteriormente no puede deducirse si en $\mathbf{R}$ existe o no un número x, puesto que $\mathbf{Q}$ satisface también estos nueve axiomas y hemos probado que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2. El axioma de completitud nos permitirá introducir los números irracionales en el sistema de los números reales y proporcionar al sistema de los números reales una propiedad de continuidad que es fundamental en muchos de los teoremas de Análisis.

Antes de describir el axioma de completitud, es conveniente introducir una terminología y una notación adicionales.

Definición 1.12. *Sea S un conjunto de números reales. Si existe un número real b tal que $x \leq b$ para todo x de S, diremos que b es una cota superior de S y que S está acotado superiormente por b.*

Decimos *una* cota superior ya que cada número mayor que b también es una cota superior. Si una cota superior b es, además, un elemento de S, b se denomina *último elemento* o *elemento máximo* de S. A lo sumo habrá uno de tales b. Si existe tal número b, escribiremos

$$b = \text{máx}\, S.$$

Un conjunto carente de cotas superiores se denomina *no acotado superiormente*.

Las definiciones de los términos *cota inferior, acotado inferiormente, primer elemento* (o *elemento mínimo*) pueden formularse análogamente. Si S tiene un elemento mínimo, designaremos a dicho mínimo por mín S.

Ejemplos.

1. El conjunto $\mathbf{R}^+ = (0, +\infty)$ es un conjunto no acotado superiormente. No posee ni cotas superiores ni elemento máximo. Está acotado inferiormente por 0, pero no posee elemento mínimo.
2. El intervalo cerrado $S = [0, 1]$ está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. De hecho, máx $S = 1$ y mín $S = 0$.

3. El intervalo semiabierto $S = [0, 1)$ está acotado superiormente por 1, pero carece de elemento máximo. Su elemento mínimo es 0.

Para conjuntos como los del ejemplo 3 que están acotados superiormente pero que carecen de elemento máximo, existe un concepto que sustituye al de elemento máximo. Se denomina *extremo superior* o *supremo* del conjunto y se define como sigue:

Definición 1.13. *Sea S un conjunto de números reales acotado superiormente. Un número real b se denomina extremo superior de S si verifica las dos propiedades siguientes:*

a) *b es una cota superior de S.*
b) *Ningún número menor que b es cota superior de S.*

Ejemplos. Si $S = [0, 1]$ el elemento máximo 1 es asimismo extremo superior de S. Si $S = [0, 1)$, el número 1 es extremo superior de S, aun cuando S carece de elemento máximo.

Es fácil probar que un conjunto no puede tener dos extremos superiores distintos. Por lo tanto, si existe extremo superior de S, existe sólo uno y puede hablarse *del* extremo superior.

Es corriente, en la práctica, referirse al extremo superior de un conjunto por medio del término más breve de *supremo*, abreviado *sup*. Adoptamos esta convención y escribimos

$$b = \sup S,$$

para indicar que b es el supremo de S. Si S tiene un elemento máximo, entonces $\max S = \sup S$.

El *extremo inferior* o *ínfimo* de S, designado por $\inf S$, se define de forma análoga.

1.11 EL AXIOMA DE COMPLETITUD

Nuestro último axioma del sistema de los números reales involucra la noción de supremo.

Axioma 10. *Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b = \sup S$.*

Como consecuencia de este axioma se obtiene que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente admite un ínfimo.

Teorema 1.16 (Propiedad de la comparación). *Dados dos subconjuntos no vacíos S y T de* **R** *tales que $s \leq t$ para todo s de S y todo t de T, si T tiene supremo, entonces S tiene supremo, y*

$$\sup S \leq \sup T.$$

1.13 PROPIEDADES DE LOS ENTEROS DEDUCIDAS DEL AXIOMA DE COMPLETITUD

Teorema 1.17. *El conjunto $\mathbf{Z}^+$ de los enteros positivos* 1, 2, 3, ..., *no está acotado superiormente.*

Demostración. Si $\mathbf{Z}^+$ estuviese acotado superiormente, entonces $\mathbf{Z}^+$ admitiría un supremo, tal como $a = \sup \mathbf{Z}^+$. Por el teorema 1.14 tendríamos que $a - 1 < n$ para algún n de $\mathbf{Z}^+$. Por lo tanto $n + 1 > a$ para esta n. Esto contradice el hecho de ser $a = \sup \mathbf{Z}^+$ ya que $n + 1 \in \mathbf{Z}^+$.

Teorema 1.18. *Para cada número real x existe un entero positivo n tal que $n > x$.*

Demostración. Si no fuese así, existiría un x que sería una cota superior para $\mathbf{Z}^+$, en contradicción con el teorema 1.17.

1.14 LA PROPIEDAD ARQUIMEDIANA DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

El teorema que sigue enuncia la propiedad arquimediana del sistema de los números reales. Geométricamente dice que todo segmento lineal, por largo que sea, puede recubrirse por medio de un número finito de segmentos lineales de longitud positiva dada, por pequeña que sea.

Teorema 1.19. *Si $x > 0$ y si y es un número real arbitrario, existe un entero positivo n tal que $nx > y$.*

Demostración. Aplicar el teorema 1.18 sustituyendo x por y/x.

1.15 LOS NÚMEROS RACIONALES CON REPRESENTACIÓN DECIMAL FINITA

Un número real de la forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$

En otras palabras, a_1 es el mayor entero que satisface las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} \le x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}.$$

En general, habiendo elegido $a_1, \ldots, a_{n-1}$ con $0 \le a_i \le 9$, sea a_n el mayor entero que satisfaga las desigualdades

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le x < a_0 + \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}. \tag{4}$$

Entonces $0 \le a_n \le 9$ y tendremos

$$r_n \le x < r_n + \frac{1}{10^n},$$

donde $r_n = a_0 . a_1 a_2 \ldots a_n$. Esto completa la demostración. Es fácil verificar que x es, de hecho, el supremo del conjunto de los números racionales $r_1, r_2, \ldots$

1.17 REPRESENTACIONES DECIMALES INFINITAS DE LOS NÚMEROS REALES

Los enteros $a_0, a_1, a_2, \ldots$, obtenidos en la demostración del teorema 1.20 pueden utilizarse para definir una representación decimal infinita de x. Escribiremos

$$x = a_0 . a_1 a_2 \cdots$$

para indicar que a_n es el mayor entero que satisface (4). Por ejemplo, si $x = \frac{1}{8}$, obtendremos $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$ y $a_n = 0$ para todo $n \ge 4$. Por lo tanto, podemos escribir

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125000 \cdots$$

Si intercambiamos los signos de desigualdad $\le$ y $<$ en (4), obtenemos una definición ligeramente diferente de representación decimal. Los decimales finitos r_n satisfacen $r_n < x \le r_n + 10^{-n}$, sin embargo los dígitos $a_0, a_1, a_2, \ldots$, necesarios no son los mismos que en (4). Por ejemplo, si aplicamos esta segunda definición a $x = \frac{1}{8}$, obtenemos la representación decimal infinita

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}124999 \cdots$$

El que un número real admita dos representaciones decimales distintas es un simple ejemplo del hecho de que dos conjuntos diferentes de números reales pueden tener el mismo supremo.

1.18 VALOR ABSOLUTO Y DESIGUALDAD TRIANGULAR

En Análisis son bastante frecuentes los cálculos con desigualdades. Son de particular importancia las que se relacionan con la noción de *valor absoluto*. Si x es un número real, el valor absoluto de x, desginado por $|x|$, se define como sigue:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Una desigualdad importante concerniente a los valores absolutos viene dada por el siguiente:

Teorema 1.21. *Si $a \geq 0$, entonces tenemos la desigualdad $|x| \leq a$ si, y sólo si, $-a \leq x \leq a$.*

Demostración. De la definición de $|x|$ se obtiene la desigualdad $-|x| \leq x \leq |x|$, ya que $x = |x|$ o $x = -|x|$. Si suponemos que $|x| \leq a$, podemos escribir $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$ y la mitad del teorema queda demostrada. Recíprocamente, si suponemos $-a \leq x \leq a$, entonces, si $x \geq 0$, tenemos que $|x| = x \leq a$, mientras que si $x < 0$, tenemos que $|x| = -x \leq a$. En ambos casos obtenemos que $|x| \leq a$ y el teorema queda demostrado.

Podemos utilizar este teorema para demostrar la *desigualdad triangular*.

Teorema 1.22. *Para números reales arbitrarios x e y se verifica*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \textit{(desigualdad triangular)}$$

Demostración. Tenemos que $-|x| \leq x \leq |x|$ y que $-|y| \leq y \leq |y|$. Sumando obtenemos $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$ y, en virtud del teorema 1.21, concluimos que $|x + y| \leq |x| + |y|$. Esto demuestra el teorema.

A menudo se utilizan otras formas de la desgiualdad triangular. Por ejemplo, si en el teorema 1.22 hacemos $x = a - c$ e $y = c - b$, resulta

$$|a - b| \leq |a - c| + |c - b|.$$

Asimismo, del teorema 1.22, obtenemos $|x| \geq |x + y| - |y|$. Haciendo $x = a + b$, $y = -b$, resulta

$$|a + b| \geq |a| - |b|.$$

Intercambiando a y b obtendremos, además, $|a + b| \geq |b| - |a| = -(|a| - |b|)$, y por lo tanto

$$|a + b| \geq \big||a| - |b|\big|.$$

Por inducción podemos probar asimismo las generalizaciones

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

y

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geq |x_1| - |x_2| - \cdots - |x_n|.$$

1.19 LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

Vamos a deducir ahora otra desigualdad usada a menudo en Análisis.

Teorema 1.23 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Si $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera, se tiene*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Además, la igualdad se verifica si, y sólo si, existe un número real x tal que $a_k x + b_k = 0$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. Una suma de cuadrados no puede ser nunca negativa. Por lo tanto tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0$$

para todo número real x, y es igualdad si, y sólo si, cada término es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma

$$Ax^2 + 2Bx + C \geq 0,$$

donde

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \qquad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \qquad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Si $A > 0$, hacemos $x = -B/A$ a fin de obtener $B^2 - AC \leq 0$ que es la desigualdad deseada. Si $A = 0$, la demostración es trivial.

NOTA. Utilizando notación vectorial, la desigualdad de Cauchy-Schwarz toma la forma

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2,$$

donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ son dos vectores n-dimensionales,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

es su producto escalar, y $\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})^{1/2}$ es la longitud de $\mathbf{a}$.

1.20 MÁS Y MENOS INFINITO Y LA EXTENSIÓN R* DEL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

En esta sección extenderemos el sistema de los números reales adjuntando dos «puntos ideales» designados por los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ («más infinito» y «menos infinito»).

Definición 1.24. *Por sistema ampliado de los números reales,* $\mathbf{R}^*$, *entenderemos el conjunto de los números reales* $\mathbf{R}$ *junto con dos símbolos* $+\infty$ *y* $-\infty$ *que satisfagan las siguientes propiedades:*

a) *Si* $x \in \mathbf{R}$, *tenemos*

$$x + (+\infty) = +\infty, \qquad x + (-\infty) = -\infty,$$
$$x - (+\infty) = -\infty, \qquad x - (-\infty) = +\infty,$$
$$x/(+\infty) = x/(-\infty) = 0.$$

b) *Si* $x > 0$, *tenemos*

$$x(+\infty) = +\infty, \qquad x(-\infty) = -\infty.$$

c) *Si* $x < 0$, *tenemos*

$$x(+\infty) = -\infty, \qquad x(-\infty) = +\infty.$$

d)

$$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty,$$
$$(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

e) *Si* $x \in \mathbf{R}$, *entonces* $-\infty < x < +\infty$.

NOTACIÓN. Utilizaremos el símbolo $(-\infty, +\infty)$ para designar a $\mathbf{R}$ y $[-\infty, +\infty]$ para designar a $\mathbf{R}^*$. Los puntos de $\mathbf{R}$ se llaman «finitos» para distinguirlos de los puntos «infinitos» $+\infty$ y $-\infty$.

Demostración. Solamente demostraremos la propiedad distributiva; las otras demostraciones son más simples. Si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ y $z = (z_1, z_2)$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} x(y + z) &= (x_1, x_2)(y_1 + z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1y_1 + x_1z_1 - x_2y_2 - x_2z_2, x_1y_2 + x_1z_2 + x_2y_1 + x_2z_1) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1z_1 - x_2z_2, x_1z_2 + x_2z_1) \\ &= xy + xz. \end{aligned}$$

Teorema 1.28.

$$(x_1, x_2) + (0, 0) = (x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2)(0, 0) = (0, 0),$$

$$(x_1, x_2)(1, 0) = (x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) = (0, 0).$$

Demostración. Las demostraciones son inmediatas a partir de las definiciones, lo mismo que en los teoremas 1.29, 1.30, 1.32 y 1.33.

Teorema 1.29. *Dados dos números complejos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, existe un número complejo z tal que $x + z = y$. De hecho, $z = (y_1 - x_1, y_2 - x_2)$. Este z se designa por $y - x$. El número complejo $(-x_1, -x_2)$ se designa por $-x$.*

Teorema 1.30. *Para cualquier par de números complejos x e y, tenemos*

$$(-x)y = x(-y) = -(xy) = (-1, 0)(xy).$$

Definición 1.31. *Si $x = (x_1, x_2) \neq (0, 0)$ e y son números complejos, definimos $x^{-1} = [x_1/(x_1^2 + x_2^2), -x_2/(x_1^2 + x_2^2)]$, e $y/x = yx^{-1}$.*

Teorema 1.32. *Si x e y son números complejos con $x \neq (0, 0)$, existe un número complejo z tal que $xz = y$, a saber, $z = yx^{-1}$.*

Revisten especial interés las operaciones con números complejos cuya parte imaginaria es 0.

Teorema 1.33.

$$(x_1, 0) + (y_1, 0) = (x_1 + y_1, 0),$$

$$(x_1, 0)(y_1, 0) = (x_1y_1, 0),$$

$$(x_1, 0)/(y_1, 0) = (x_1/y_1, 0), \qquad \text{si } y_1 \neq 0.$$

NOTA. Es evidente, que en virtud del teorema 1.33, podemos realizar las operaciones aritméticas de los números complejos de parte imaginaria nula operan-

dientemente, por Argand en 1806. Más tarde Gauss ideó la expresión un tanto desafortunada de «número complejo». Los números complejos admiten otras representaciones geométricas. En vez de utilizar puntos de un plano, se pueden utilizar puntos de otras superficies. Riemann encontró que la esfera es especialmente adecuada para este propósito. Se proyectan los puntos de la esfera desde el Polo Norte sobre el plano tangente a la esfera en el Polo Sur y entonces a cada punto del plano le corresponde un punto sobre la esfera. Con excepción del Polo Norte, a cada punto de la esfera le corresponde un punto sobre el plano y sólo uno. Esta correspondencia se denomina una *proyección estereográfica.* (Ver Fig. 1.3.)

1.23 LA UNIDAD IMAGINARIA

Conviene a veces considerar el número complejo (x_1, x_2) como un vector bidimensional de componentes x_1 y x_2. Sumar dos números complejos utilizando la definición 1.26 es lo mismo que sumar dos vectores componente a componente. El número complejo $1 = (1, 0)$ juega el mismo papel que el vector unitario de dirección horizontal. El análogo al vector unitario de dirección vertical vamos a introducirlo ahora.

Definición 1.34. *El número complejo* (0, 1) *se representa por i y se llama unidad imaginaria.*

Teorema 1.35. *Cada número complejo* $x = (x_1, x_2)$ *puede representarse en la forma* $x = x_1 + ix_2$.

Demostración.

$$x_1 = (x_1, 0), \qquad ix_2 = (0, 1)(x_2, 0) = (0, x_2),$$
$$x_1 + ix_2 = (x_1, 0) + (0, x_2) = (x_1, x_2).$$

El próximo teorema expresa que el número complejo i proporciona una solución para la ecuación $x^2 = -1$.

Teorema 1.36. $i^2 = -1$.

Demostración.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

1.24 VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Vamos a extender ahora el concepto de valor absoluto al sistema de los números complejos.

Definición 1.37. *Si $x = (x_1, x_2)$, definimos el módulo, o valor absoluto, de x como el número real no negativo $|x|$ dado por*

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,.$$

Teorema 1.38.

i) $|(0, 0)| = 0$, *y* $|x| > 0$ *si* $x \neq 0$. ii) $|xy| = |x|\,|y|$.

iii) $|x/y| = |x|/|y|$, *si* $y \neq 0$. iv) $|(x_1, 0)| = |x_1|$.

Demostración. Las afirmaciones (i) y (iv) son inmediatas. Para demostrar (ii), consideremos $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$, entonces $xy = x_1y_1 - x_2y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. La afirmación (ii) se sigue de la relación

$$|xy|^2 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 = (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = |x|^2|y|^2.$$

La ecuación (iii) puede deducirse de (ii) escribiéndola en la forma $|x| = |y|\,|x/y|$.

Geométricamente, $|x|$ representa la longitud del segmento que une el origen con el punto x. En general, $|x - y|$ es la distancia entre los puntos x e y. Utilizando esta interpretación geométrica, el siguiente teorema establece que uno de los lados de un triángulo es menor que la suma de los otros dos lados.

Teorema 1.39. *Si x e y son números complejos, entonces*

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \textit{(desigualdad triangular)}$$

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

1.25 IMPOSIBILIDAD DE ORDENAR LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Todavía no hemos definido ninguna relación de la forma $x < y$, si x e y son números complejos cualesquiera, ya que es imposible dar una definición de $<$ para los números complejos que satisfaga las propiedades dadas por los axiomas 6 al 8. Para justificarlo, supongamos que fuese posible definir una relación de orden $<$ que satisficiera los axiomas 6, 7 y 8. Entonces, como $i \neq 0$, se debiera tener $i > 0$ o $i < 0$, por el axioma 6. Supongamos que $i > 0$. Entonces tomando $x = y = i$ en el axioma 8, tendríamos $i^2 > 0$, o $-1 > 0$. Sumando 1 a ambos miembros (axioma 7), obtendríamos $0 > 1$. Por otro lado, aplicando el axioma 8 a $-1 > 0$, hallaríamos $1 > 0$. Tendríamos, pues, $0 > 1$ y también $1 > 0$, que, por el axioma 6, es imposible. Así pues, suponer que $i > 0$ lleva a contradicción. [¿Por qué la desigualdad $-1 > 0$ no era ya una

contradicción?] Un razonamiento análogo prueba que no es posible $i < 0$. Por lo tanto, los números complejos no pueden ser ordenados de tal suerte que se verifiquen los axiomas 6, 7 y 8.

1.26. EXPONENCIALES COMPLEJAS

La exponencial e^x (x real) ha sido mencionada anteriormente. Deseamos definir e^z para z complejo de tal suerte que las principales propiedades de la función exponencial real se conserven. Las citadas propiedades de e^x para x real son la ley de los exponentes, $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, y la ecuación $e^0 = 1$. Daremos una definición de e^z para z complejo que conserve estas propiedades y que se reduzca a la exponencial ordinaria cuando z sea real.

Si escribimos $z = x + iy$ (x, y reales), entonces para que se verifique la ley de los exponentes deberíamos tener $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$. Queda entonces por definir lo que significa e^{iy}.

Definición 1.40. *Si $z = x + iy$, definimos $e^z = e^{x+iy}$ como el número complejo $e^z = e^x$ (cos $y + i$ sen y).*

Esta definición* coincide claramente con la función exponencial real cuando z es real (esto es, $y = 0$). Probaremos a continuación que la ley de los exponentes se cumple.

Teorema 1.41. *Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son dos números complejos, entonces tenemos*

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Demostración.

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1), \qquad e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2),$$

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}e^{x_2}[&\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 \\ &+ i(\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2)]. \end{aligned}$$

* Es posible dar muchos argumentos para motivar la ecuación $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$. Por ejemplo, escribamos $e^{iy} = f(y) + ig(y)$ e intentemos determinar las funciones de variable real f y g a fin de que las leyes usuales de las operaciones con exponenciales reales sean aplicables también a las exponenciales complejas. Diferenciando formalmente se obtiene $e^{iy} = g'(y) - if'(y)$, si suponemos que $(e^{iy})' = ie^{iy}$. Comparando estas dos expresiones para e^{iy}, vemos que f y g deben satisfacer las ecuaciones $f(y) = g'(y)$, $f'(y) = -g(y)$. La eliminación de g conduce a $f(y) = -f''(y)$. Como deseamos que $e^0 = 1$, debemos tener que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. Ello prueba que $f(y) = \cos y$ y $g(y) = -f'(y) = \operatorname{sen} y$. Por supuesto, este razonamiento *no prueba* nada, pero indica ostensiblemente que la definición $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$ es razonable.

Ahora bien, $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$, ya que x_1 y x_2 son ambos reales. Además,

$$\cos y_1 \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \operatorname{sen} y_2 = \cos(y_1 + y_2)$$

y

$$\cos y_1 \operatorname{sen} y_2 + \operatorname{sen} y_1 \cos y_2 = \operatorname{sen}(y_1 + y_2),$$

y por lo tanto

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

1.27 OTRAS PROPIEDADES DE LAS EXPONENCIALES COMPLEJAS

En los teoremas siguientes z, z_1, z_2 designan números complejos.

Teorema 1.42. *e^z jamás es cero.*

Demostración. $e^z e^{-z} = e^0 = 1$. Por lo tanto, e^z no puede ser cero.

Teorema 1.43. *Si x es real, entonces $|e^{ix}| = 1$.*

Demostración. $|e^{ix}|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, y $|e^{ix}| > 0$.

Teorema 1.44. *$e^z = 1$ si, y sólo si, z es un múltiplo entero de $2\pi i$.*

Demostración. Si $z = 2\pi i n$, donde n es un entero, entonces

$$e^z = \cos(2\pi n) + i \operatorname{sen}(2\pi n) = 1.$$

Recíprocamente, supongamos que $e^z = 1$. Esto significa que $e^x \cos y = 1$ y $e^x \operatorname{sen} y = 0$. Como que $e^x \neq 0$, debe ser $\operatorname{sen} y = 0$, $y = k\pi$, donde k es un entero. Pero $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Por lo tanto, $e^x = (-1)^k$ ya que $e^x \cos(k\pi) = 1$. Como $e^x > 0$, k debe ser par. Por lo tanto $e^x = 1$ y entonces $x = 0$. Esto prueba el teorema.

Teorema 1.45. *$e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, $z_1 - z_2 = 2\pi i n$ (donde n es un entero).*

Demostración. $e^{z_1} = e^{z_2}$ si, y sólo si, $e^{z_1 - z_2} = 1$.

1.28 EL ARGUMENTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

Si el punto $z = (x, y) = x + iy$ se representa en cordenadas polares r y θ, podemos escribir $x = r \cos \theta$ e $y = r \operatorname{sen} \theta$, es decir, $z = r \cos \theta + ir \operatorname{sen} \theta = re^{i\theta}$. Los dos números r y θ determinan a z de forma única. Recíprocamente, el nú-

$$z^0 = 1, \qquad z^{n+1} = z^n z, \qquad \textit{si } n \geq 0,$$

$$z^{-n} = (z^{-1})^n, \qquad\qquad \textit{si } z \neq 0 \quad y \quad n > 0.$$

El teorema 1.50 establece que se verifican las reglas usuales de los exponentes. La demostración, que se puede hacer por inducción, se deja como ejercicio.

Teorema 1.50. *Dados dos enteros m y n, tenemos, para $z \neq 0$,*

$$z^n z^m = z^{n+m} \qquad \text{y} \qquad (z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

Teorema 1.51. *Si $z \neq 0$, y si n es un entero positivo, entonces existen exactamente n números complejos distintos $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (llamados raíces n-ésimas de z), tales que*

$$z_k^n = z, \quad \textit{para cada } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Además, estas raíces son dadas por las fórmulas

$$z_k = Re^{i\phi_k}, \qquad \textit{donde} \qquad R = |z|^{1/n},$$

y

$$\phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

NOTA. Las n raíces n-ésimas de z están igualmente espaciadas sobre el círculo de radio $R = |z|^{1/n}$, con centro en el origen.

Demostración. Los n números complejos $Re^{i\phi_k}$, $0 \leq k \leq n-1$, son distintos y cada uno de ellos es una raíz n-ésima de z, ya que

$$(Re^{i\phi_k})^n = R^n e^{in\phi_k} = |z| e^{i[\arg(z) + 2\pi k]} = z.$$

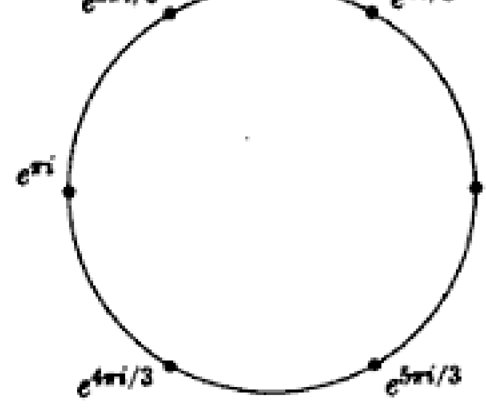


Figura 1.4

4. Si $x > 0$, Log $(x) = \log(x)$, ya que $|x| = x$ y arg $(x) = 0$.
5. Puesto que $|1 + i| = \sqrt{2}$ y arg $(1 + i) = \pi/4$, Log $(1 + i) = \log \sqrt{2} + i\pi/4$.

Teorema 1.54. *Si $z_1z_2 \neq 0$, entonces*

$$\operatorname{Log}(z_1z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2),$$

donde $n(z_1, z_2)$ es el entero definido en el teorema 1.48.

Demostración.

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}(z_1z_2) &= \log|z_1z_2| + i\arg(z_1z_2)\\ &= \log|z_1| + \log|z_2| + i[\arg(z_1) + \arg(z_2) + 2\pi n(z_1, z_2)].\end{aligned}$$

1.31 POTENCIAS COMPLEJAS

Utilizando los logaritmos complejos, podemos dar ahora una definición de las potencias complejas de números complejos.

Definición 1.55. *Si $z \neq 0$ y si w es un número complejo cualquiera, definimos*

$$z^w = e^{w \operatorname{Log} z}.$$

EJEMPLOS

1. $i^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$.
2. $(-1)^i = e^{i \operatorname{Log}(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi}$.
3. Si n es un entero, entonces $z^{n+1} = e^{(n+1)\operatorname{Log} z} = e^{n \operatorname{Log} z}e^{\operatorname{Log} z} = z^n z$, por lo que la definición 1.55 no se contradice con la definición 1.49.

Los dos teoremas siguientes nos suministran las reglas de cálculo con potencias complejas:

Teorema 1.56. $z^{w_1}z^{w_2} = z^{w_1+w_2}$ *si* $z \neq 0$.

Demostración.

$$z^{w_1+w_2} = e^{(w_1+w_2)\operatorname{Log} z} = e^{w_1 \operatorname{Log} z}e^{w_2 \operatorname{Log} z} = z^{w_1}z^{w_2}.$$

Teorema 1.57. *Si $z_1z_2 \neq 0$, entonces*

$$(z_1z_2)^w = z_1^w z_2^w e^{2\pi i w\, n(z_1, z_2)},$$

donde $n(z_1, z_2)$ es el entero definido en el teorema 1.48.

Demostración.

$$(z_1 z_2)^w = e^{w \operatorname{Log}(z_1 z_2)} = e^{w[\operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2\pi i n(z_1, z_2)]}.$$

1.32 SENOS Y COSENOS COMPLEJOS

Definición 1.58. *Dado un número complejo z, definimos*

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

NOTA. Cuando z es real, estas igualdades concuerdan con la definición 1.40.

Teorema 1.59. *Si $z = x + iy$, entonces tenemos*

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$
$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} 2\cos z &= e^{iz} + e^{-iz} \\ &= e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + e^{y}(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= \cos x(e^{y} + e^{-y}) - i \operatorname{sen} x(e^{y} - e^{-y}) \\ &= 2\cos x \cosh y - 2i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \end{aligned}$$

La demostración para sen z es análoga.

Más propiedades de los senos y cosenos se dan en los ejercicios.

1.33 INFINITO Y EL PLANO COMPLEJO AMPLIADO C*

A continuación extendemos el sistema de los números complejos adjuntando un punto ideal designado por el símbolo ∞.

Definición 1.60. *Por sistema de los números complejos ampliado* $\mathbf{C}^*$ *entenderemos el plano complejo* $\mathbf{C}$ *junto con un símbolo ∞ que satisfaga las siguientes propiedades:*

a) *Si $z \in \mathbf{C}$, entonces se tiene* $z + \infty = z - \infty = \infty$, $z/\infty = 0$.
b) *Si $z \in \mathbf{C}$, pero $z \neq 0$, entonces* $z(\infty) = \infty$ *y* $z/0 = \infty$.
c) $\infty + \infty = (\infty)(\infty) = \infty$.

Definición 1.61. *Cada conjunto de* $\mathbf{C}$ *de la forma* $\{z : |z| > r \geq 0\}$ *se denomina entorno de* ∞, *o bola con centro en* ∞.

El lector puede preguntarse por qué a $\mathbf{R}$ le hemos adjuntado dos símbolos, $+\infty$ y $-\infty$, mientras que a $\mathbf{C}$ sólo le adjuntamos un símbolo, ∞. La respuesta radica en el hecho de que existe una relación de orden $<$ entre números reales, mientras que entre números complejos no sucede lo mismo. Para que ciertas propiedades de los números reales que involucran la relación $<$ se verifiquen sin excepción, es necesario disponer de dos símbolos, $+\infty$ y $-\infty$, tales como los definidos anteriormente. Ya hemos mencionado, por ejemplo, que cada conjunto no vacío tiene un sup en $\mathbf{R}^*$.

En $\mathbf{C}$ resulta más conveniente disponer de un solo punto ideal. A modo de ilustración, recordemos que la proyección estereográfica establece una correspondencia uno a uno entre los puntos del plano complejo y los puntos de la superficie de la esfera, distintos del Polo Norte. La aparente excepción del Polo Norte puede ser eliminada considerándolo la imagen geométrica del punto ideal ∞. Así conseguiremos una correspondencia uno a uno entre el plano complejo ampliado $\mathbf{C}^*$ y la superficie total de la esfera. Es evidente, desde un punto geométrico, que si el Polo Sur se coloca en el origen del plano complejo, el exterior de un «amplio» círculo en el plano se colocará, por proyección estereográfica, en un «pequeño» casquete esférico alrededor del Polo Norte. Ello ilustra con claridad por qué hemos definido un entorno de ∞ mediante una desigualdad de la forma $|z| > r$.

EJERCICIOS

Enteros

1.1 Demostrar que no existe un primo máximo. (Una demostración era conocida por Euclides.)

1.2 Si n es un entero positivo, probar la identidad algebraica

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

1.3 Si $2^n - 1$ es primo, probar que n es primo. Un primo de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se llama un *primo de Mersenne.*

1.4. Si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de dos. Un primo de la forma $2^{2^m} + 1$ se llama un *primo de Fermat. Indicación:* Utilizar el ejercicio 1.2.

1.5 Los *números de Fibonacci* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., son definidos recursivamente por la fórmula $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, con $x_1 = x_2 = 1$.
Probar que $(x_n, x_{n+1}) = 1$ y que $x_n = (a^n - b^n)/(a - b)$, donde a y b son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

1.6 Probar que cada conjunto no vacío de números enteros positivos posee primer elemento. Este es el *principio de buena ordenación.*

Números racionaes e irracionales

1.7 Hallar el número racional cuya expresión decimal es 0,3344444...
1.8 Probar que la expresión decimal de x terminará en ceros (o en nueves) si, y sólo si, x es un número racional cuyo denominador es de la forma $2^n 5^m$, donde m y n son enteros no negativos.
1.9 Probar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.
1.10 Si a, b, c, d son racionales y si x es irracional, probar que $(ax + b)/(cx + d)$ es, en general, irracional. ¿Cuándo se dan las excepciones?
1.11 Dado un número real cualquiera $x > 0$, probar que hay un irracional entre 0 y x.
1.12 Si $a/b < c/d$ con $b > 0$, $d > 0$, probar que $(a + c)/(b + d)$ está entre a/b y c/d.
1.13 Sean a y b enteros positivos. Probar que $\sqrt{2}$ está siempre entre las dos fracciones a/b y $(a + 2b)/(a + b)$. ¿Qué fracción está más próxima a $\sqrt{2}$?
1.14 Probar que $\sqrt{n - 1} + \sqrt{n + 1}$ es irracional para todo entero $n \geq 1$.
1.15 Dado un número real x y un entero $N > 1$, probar que existen enteros h y k con $0 < k \leq N$ tales que $|kx - h| < 1/N$. *Indicación.* Considerar los $N + 1$ números $tx - [tx]$ para $t = 0, 1, 2, \ldots, N$ y probar que algún par difiere a lo más $1/N$.
1.16 Si x es irracional, probar que existe una infinidad de números racionales h/k con $k > 0$ tales que $|x - h/k| < 1/k^2$. *Indicación.* Suponer que sólo existe un número finito $h_1/k_1, \ldots, h_r/k_r$ y aplicar el ejercicio 1.15 para llegar a contradicción, con $N > 1/\delta$, donde δ es el menor de los números $|x - h_i/k_i|$.
1.17 Sea x un número racional positivo de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k!},$$

donde cada a_k es un entero no negativo con $a_k \leq k - 1$ para $k \geq 2$ y $a_n > 0$. Sea $[x]$ el mayor entero contenido en x. Probar que $a_1 = [x]$, que $a_k = [k!\, x] - k\,[(k - 1)!\, x]$ para $k = 2, \ldots, n$, y que n es el menor entero tal que $n!\, x$ es entero. Recíprocamente, probar que cada número racional positivo x puede ser expresado en esta forma de una manera y una sola.

Cotas superiores

1.18 Probar que el sup y el inf de un conjunto, si existen, son únicos.
1.19 Hallar el sup y el inf de cada uno de los siguientes conjuntos de números reales:

a) Todos los números de la forma $2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}$, donde p, q y r toman todos los valores enteros positivos.

Números complejos

1.27 Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

a) $(1 + i)^3$ b) $(2 + 3i)/(3 - 4i)$,
c) $i^5 + i^{16}$, d) $\frac{1}{2}(1 + i)/(1 + i^{-8})$.

1.28 En cada caso, determinar todos los valores reales x e y que satisfacen la relación dada.

a) $x + iy = |x - iy|$, b) $x + iy = (x - iy)^2$, c) $\sum_{k=0}^{100} i^k = x + iy$.

1.29 Si $z = x + iy$, x e y reales, el complejo conjugado de z es el número complejo $\bar{z} = x - iy$. Probar que:

a) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, c) $z\bar{z} = |z|^2$,
d) $z + \bar{z} =$ al doble de la parte real de z.
e) $(z - \bar{z})/i =$ al doble de la parte imaginaria de z.

1.30 Describir geométricamente el conjunto de los números complejos z que satisfacen cada una de las condiciones siguientes:

a) $|z| = 1$, b) $|z| < 1$, c) $|z| \leq 1$,
d) $z + \bar{z} = 1$, e) $z - \bar{z} = i$, f) $\bar{z} + z = |z|^2$.

1.31 Dados tres números complejos z_1, z_2, z_3 tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, probar que estos tres números son los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo unidad y centrado en el origen.

1.32 Si a y b son números complejos, probar que:

a) $|a - b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$.

b) Si $a \neq 0$, entonces $|a + b| = |a| + |b|$ si, y sólo si, b/a es real y no negativo.

1.33 Si a y b son números complejos, probar que

$$|a - b| = |1 - \bar{a}b|$$

si, y sólo si, $|a| = 1$ o $|b| = 1$. ¿Para qué números a y b es válida la desigualdad $|a - b| < |1 - \bar{a}b|$?

1.34 Si a y c son números reales constantes, b es complejo, probar que la ecuación

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0 \qquad (a \neq 0, z = x + iy)$$

representa un círculo en el plano xy.

1.35 Recordemos la definición de la inversa de la tangente: dado un número real t, $\operatorname{tg}^{-1}(t)$ es el único número real θ que satisface las dos condiciones siguientes:

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{tg} \theta = t.$$

iii) Si a es un entero, probar que la fórmula de (i) se verifica sin necesidad de imponer restricciones a θ. En este caso se conoce como el teorema de Moivre.

1.45 Utilizar el teorema de Moivre (ejercicio 1.44) para obtener las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} 3\theta = 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta,$$
$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta$$

válidas para todo θ real. ¿Son válidas si θ es complejo?

1.46 Definimos $\operatorname{tg} z = (\operatorname{sen} z)/(\cos z)$ y probar que, para $z = x + iy$, se tiene

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$$

1.47 Sea w un número complejo dado. Si $w \neq \pm 1$, probar que existen dos valores de $z = x + iy$ que satisfacen las condiciones $\cos z = w$ y $-\pi < x \leq +\pi$. Hallar estos valores cuando $w = i$ y cuando $w = 2$.

1.48 Demostrar la identidad de Lagrange para números complejos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 - \sum_{1 \leq k < j \leq n} |a_k \bar{b}_j - a_j \bar{b}_k|^2.$$

Utilizarla para deducir la desigualdad de Cauchy-Schwarz para números complejos.

1.49 a) Probar, utilizando la ecuación de la parte imaginaria de la fórmula de Moivre, que

$$\operatorname{sen} n\theta = \operatorname{sen}^n \theta \left\{ \binom{n}{1} \operatorname{cotg}^{n-1} \theta - \binom{n}{3} \operatorname{cotg}^{n-3} \theta + \binom{n}{5} \operatorname{cotg}^{n-5} \theta - + \cdots \right\}.$$

b) Si $0 < \theta < \pi/2$, probar que

$$\operatorname{sen} (2m + 1)\theta = \operatorname{sen}^{2m+1} \theta P_m (\operatorname{cotg}^2 \theta)$$

donde P_m es el polinomio de grado m dado por

$$P_m(x) = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - + \cdots$$

Utilizar este resultado para demostrar que P_m tiene ceros en los m puntos distintos $x_k = \operatorname{cotg}^2 \{\pi k/(2m + 1)\}$ para $k = 1, 2, \ldots, m$.

c) Demostrar que la suma de los ceros de P_m viene dada por

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi k}{2m + 1} = \frac{m(2m - 1)}{3},$$

y que la suma de sus cuadrados viene dada por

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotg}^4 \frac{\pi k}{2m + 1} = \frac{m(2m - 1)(4m^2 + 10m - 9)}{45}.$$

NOTA. Estas identidades pueden utilizarse para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$ y $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90$. (Ver ejercicios 8.46 y 8.47.)

1.50 Probar que $z^n - 1 = \prod_{k=1}^{n} (z - e^{2\pi ik/n})$ para todo complejo z. Utilizar esto para deducir la fórmula

$$\prod_{k=1}^{n-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}} \quad \text{para } n \geq 2.$$

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

1.1 Apostol, T. M., *Calculus,* Vol. 1, 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A., Barcelona.
1.2 Birkhoff, G., y MacLane, S., *A Survey of Modern Algebra,* 3.ª ed. Macmillan, New York, 1965. (Hay traducción al castellano. Ed. Vicens Vives, Barcelona.)
1.3 Cohen, L., y Ehrlich, G., *The Structure of the Real-Number System*. Van Nostrand, Princeton, 1963.
1.4 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis.* Addison-Wesley, Reading, 1966.
1.5 Hardy, G. H., *A Course of Pure Mathematics,* 10.ª ed. Cambridge University Press, 1952.
1.6 Hobson, E. W., *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series,* Vol. 1, 3.ª ed. Cambridge University Press, 1927.
1.7 Landau, E., *Foundations of Analysis,* 2.ª ed. Chelsea, New York, 1960.
1.8 Robinson, A., *Non-Standard Analysis.* North-Holland, Amsterdam, 1966.
1.9 Thurston, H. A., *The Number System*. Blackie, London, 1956.
1.10 Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics.* 2.ª ed. Wiley, New York, 1965.

CAPÍTULO 2

Alguna nociones básicas de la teoría de conjuntos

2.1 INTRODUCCIÓN

Al estudiar las distintas ramas de la Matemática es útil manejar la notación y la terminología de la Teoría de conjuntos. Esta teoría, desarrollada por Boole y por Cantor a finales del siglo diecinueve, ha tenido una gran influencia en el desarrollo de las matemáticas del siglo veinte. Ha unificado muchas ideas, aparentemente desconexas, y ha ayudado a reducir muchos conceptos matemáticos a sus fundamentos lógicos de una manera elegante y metódica.

No daremos un desarrollo sistemático de la teoría de conjuntos; nos limitaremos a discutir algunos de sus conceptos básicos. El lector que desee explorar este terreno más ampliamente puede consultar las referencias del final de este capítulo.

Una colección de objetos, considerados como una sola entidad, se llamará *conjunto*. Los objetos de la colección se llamarán *elementos* o *miembros* del conjunto y diremos que *pertenecen al* conjunto o que *están* contenidos *en él*. El conjunto, a su vez se dice que, los *contiene* o *está compuesto* por sus elementos. Nuestro interés radica, principalmente, en los conjuntos de entes matemáticos; esto es, conjuntos de números, puntos, funciones, curvas, etc. Sin embargo, como la mayor parte de la teoría de conjuntos no depende de la naturaleza de los objetos individuales de la colección, supone una gran economía de imaginación estudiar conjuntos cuyos elementos puedan ser de cualquier tipo. Es a causa de esta cualidad de generalización por lo que la Teoría de conjuntos ha tenido un efecto tan grande en la mayor parte de los desarrollos matemáticos.

2.2 NOTACIONES

Los *conjuntos* los designaremos, usualmente, por medio de letras mayúsculas:

$$A, B, C, \ldots, X, Y, Z,$$

y los *elementos* por medio de letras minúsculas: $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Se escribe $x \in S$ para indicar que «x es un elemento de S», o que «x pertenece a S». Si x no pertenece a S, se escribe $x \notin S$. A veces para designar un conjunto escribiremos sus elementos entre llaves; por ejemplo, el conjunto de los enteros pares positivos menores que 10 se expresa por medio de $\{2, 4, 6, 8\}$. Se escribe $S = \{x : x \text{ satisface a } P\}$ para indicar que S es la colección de los x para los cuales se verifica la propiedad P.

A partir de un conjunto dado es posible formar nuevos conjuntos, llamados *subconjuntos* del conjunto dado. Por ejemplo, el conjunto de todos los enteros positivos menores que 10 que son divisibles por 4, es decir, $\{4, 8\}$, es un subconjunto del conjunto de los enteros pares positivos menores que 10. En general, decimos que un conjunto A es subconjunto de B, y se escribe $A \subseteq B$, si todo elemento de A pertenece a B. La afirmación $A \subseteq B$ no elimina la posibilidad de que sea $B \subseteq A$. De hecho, son simultáneas $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ si, y sólo si, A y B tienen los mismos elementos. En este caso, decimos que A y B son iguales y escribimos $A = B$. Si A y B no son iguales, escribimos $A \neq B$. Si $A \subseteq B$, pero $A \neq B$, entonces se dice que A es un *subconjunto propio* de B.

Conviene considerar la posibilidad de un conjunto sin elementos; tal conjunto se llama *conjunto vacío* y se le considera, por convenio, subconjunto de todo conjunto. El lector puede hallar útil imaginar un conjunto como una caja que contiene ciertos objetos, sus elementos. El conjunto vacío es, entonces, una caja vacía. El conjunto vacío se designa por el símbolo $\emptyset$.

2.3 PARES ORDENADOS

Consideremos un conjunto de dos elementos a y b; es decir, el conjunto $\{a, b\}$. En virtud de nuestra definición de igualdad, este conjunto es igual al conjunto $\{b, a\}$, ya que no se halla involucrada la cuestión del orden. Sin embargo, es necesario considerar también conjuntos de dos elementos en los que el orden *sea* importante. Por ejemplo, en Geometría analítica plana, las coordenadas (x, y) de un punto representan un *par ordenado* de números. El *punto* $(3, 4)$ es distinto del punto $(4, 3)$, mientras que el *conjunto* $\{3, 4\}$ es el mismo que el conjunto $\{4, 3\}$. Cuando deseemos considerar un conjunto de dos elementos a y b, *ordenados*, escribiremos los elementos entre paréntesis: (a, b). Entonces a es el primer elemento y b el segundo. Es posible dar una definición de par ordenado de objetos (a, b) que involucre tan sólo el lenguaje de la teoría de conjuntos. Tal definición es la siguiente:

Definición 2.1.

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Esta definición establece que (a, b) es un conjunto que contiene dos elementos $\{a\}$ y $\{a, b\}$. Utilizando dicha definición se puede demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.2. *$(a, b) = (c, d)$ si, y sólo si, $a = c$ y $b = d$.*

Este teorema muestra que la definición 2.1 es una definición «razonable» de par ordenado, en el sentido de que el objeto a se distingue del objeto b. La demostración del teorema 2.2 es un ejercicio instructivo para el lector. (Ver ejercicio 2.1.)

2.4 PRODUCTO CARTESIANO DE DOS CONJUNTOS

Definición 2.3. *Dados dos conjuntos A y B, llamaremos producto cartesiano de A y B, y lo representaremos $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (a, b) tales que $a \in A$ y $b \in B$.*

Ejemplo. Si $\mathbf{R}$ representa el conjunto de todos los números reales, entonces a $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le corresponde el conjunto de todos los números complejos.

2.5 RELACIONES Y FUNCIONES

Sean x e y números reales, de modo que el par ordenado (x, y) pueda ser interpretado como las coordenadas rectangulares de un punto del plano xy (o como un número complejo). Encontramos, con frecuencia, expresiones tales como

$$xy = 1, \qquad x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 \leq 1, \qquad x < y. \tag{a}$$

Cada una de estas expresiones determina un cierto conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales; es decir, el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) para los que la expresión se satisface. Un tal conjunto de pares orde-

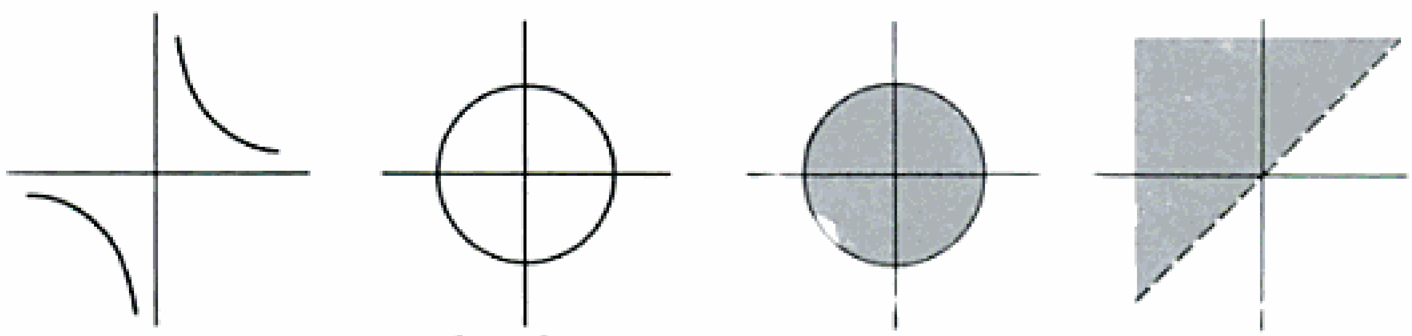


Figura 2.1

Si $\mathfrak{D}(F)$ es un subconjunto de un producto cartesiano $A \times B$, entonces F es una *función de dos variables*. En este caso los valores de la función se designan por $F(a, b)$ en vez de $F((a, b))$. Una función de dos variables reales es aquella cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Si S es un subconjunto de $\mathfrak{D}(F)$, diremos que F está *definida en S*. En este caso, el conjunto de los $F(x)$ con $x \in S$ se denomina *imagen de S por F* y se designa por $F(S)$. Si T es un conjunto cualquiera que contenga a $F(S)$, entonces F se llama también *aplicación de S en T*. Esto se expresa, corrientemente, escribiendo

$$F: S \to T.$$

Si $F(S) = T$, se dice que la aplicación es *sobre T*. Una aplicación de S en sí mismo se denomina a veces *transformación*.

Consideremos, por ejemplo, la función de una variable compleja definida por la ecuación $F(z) = z^2$. Esta función aplica cada sector S de la forma $0 \leq \arg(z) \leq \alpha \leq \pi/2$ del plano complejo z sobre un sector $F(S)$ determinado por las desigualdades $0 \leq \arg[F(z)] \leq 2\alpha$. (Ver Fig. 2.2.)

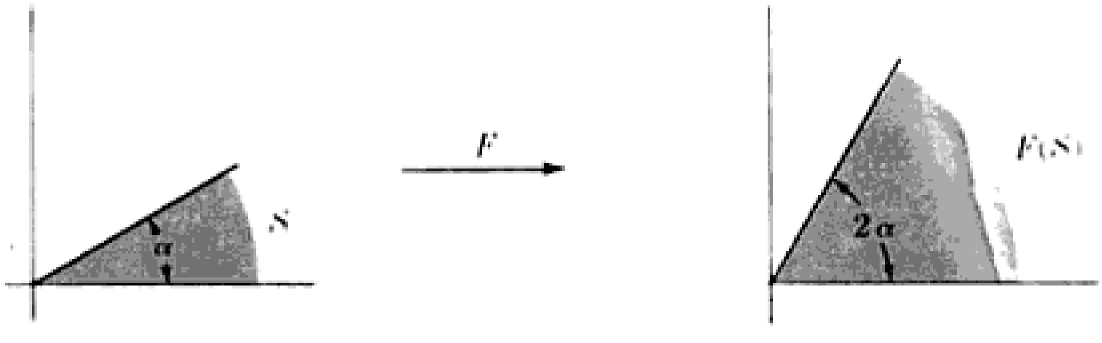


Figura 2.2

Si dos funciones F y G satisfacen la relación de inclusión $G \subseteq F$, se dice que G es una *restricción* de F o que F es una *extensión* de G. En particular, si S es un subconjunto de $\mathfrak{D}(F)$ y si G está definida por la ecuación

$$G(x) = F(x) \qquad \text{para todo } x \text{ de } S,$$

entonces se dice que G es la restricción de F a S. La función G consta de los pares de la forma $(x, F(x))$, con $x \in S$. Su dominio es S y su recorrido es $F(S)$.

2.7 FUNCIONES UNO A UNO E INVERSAS

Definición 2.7. *Sea F una función definida en S. Se dice que F es uno a uno en S si, y sólo si, para todo x e y de S,*

$$F(x) = F(y) \qquad \textit{implica } x = y.$$

Esto equivale a decir que una función que es uno a uno en S asigna valores distintos a elementos de S distintos. Estas funciones se llaman también *inyectivas.* Son importantes puesto que, como veremos en seguida, poseen *inversas.* Sin embargo, antes de establecer la definición de inversa de una función, conviene introducir una noción más general, que es la de *inversa* de una relación.

Definición 2.8. *Dada una relación S, la nueva relación $\check{S}$ definida por*

$$\check{S} = \{(a, b) : (b, a) \in S\}$$

se llama la inversa de S.

Así, un par ordenado (a, b) pertenece a $\check{S}$ si, y sólo si, el par con los elementos invertidos, (b, a), pertenece a S. Cuando S es una *relación plana,* esto significa, simplemente, que el grafo de $\check{S}$ es el simétrico del grafo de S con respecto a la recta $y = x$ como eje de simetría. En la relación definida por $x < y$, la relación inversa se define por $y < x$.

Definición 2. 9. *Supongamos que la relación F es una función. Consideremos la relación inversa $\check{F}$, que puede ser o no ser una función. Si $\check{F}$ es también una función, entonces $\check{F}$ se llama inversa de F y se designa por F^{-1}.*

La Figura 2.3(a) ilustra un ejemplo de una función F para la que $\check{F}$ no es función. En la Fig. 2.3(b) tanto F como su inversa son funciones.

El siguiente teorema nos dice que toda función que sea uno a uno en su dominio posee, siempre, una inversa.

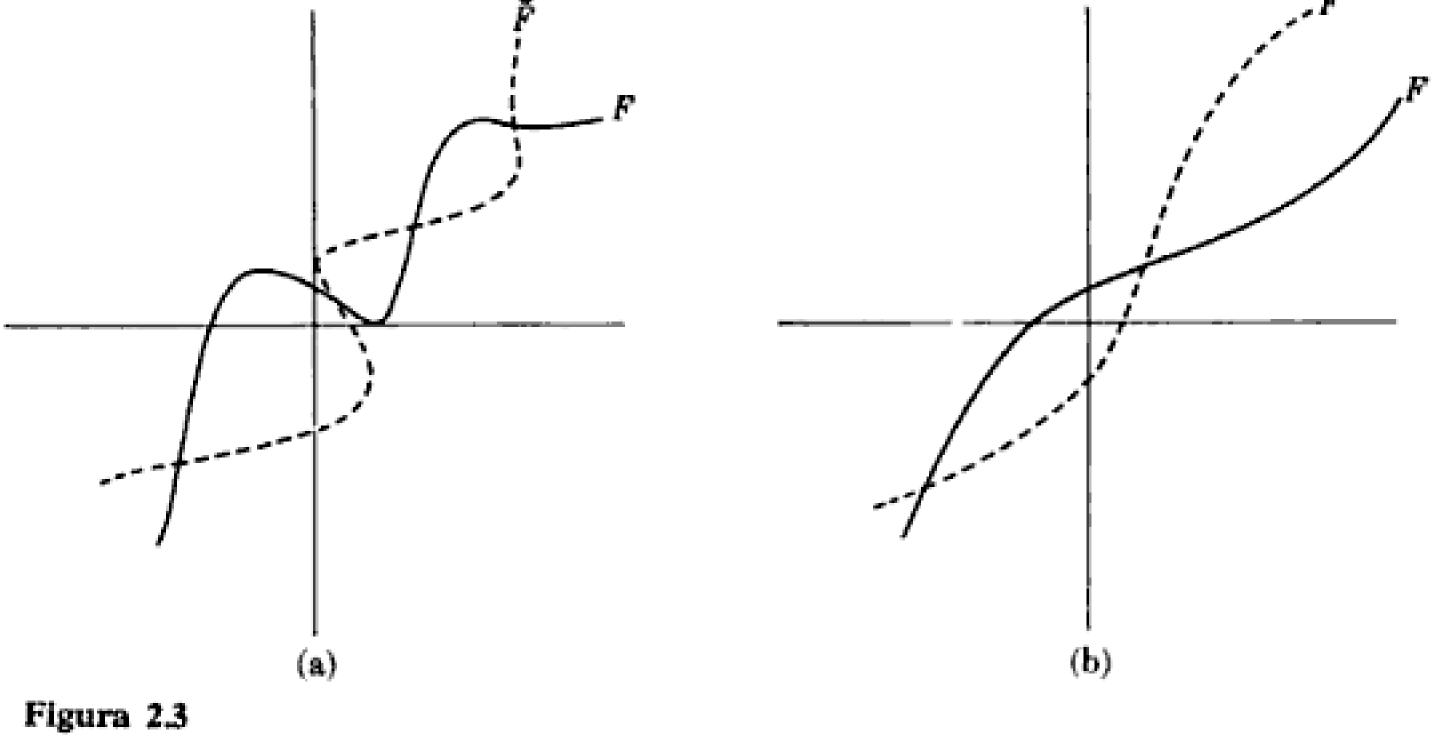


Figura 2.3

de F, esto es, el conjunto $\{F(1), F(2), F(3), \ldots\}$*, se designa también por* $\{F_1, F_2, F_3, \ldots\}$*, y el valor* F_n *se llama el término n-ésimo de la sucesión.*

Por motivos de brevedad, usaremos en ocasiones la notación $\{F_n\}$ para designar la sucesión infinita cuyo término n-ésimo es F_n.

Sea $s = \{s_n\}$ una sucesión infinita, y sea k una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos y cuyo recorrido es un subconjunto del conjunto de los enteros positivos. Supongamos que k «conserva el orden» o, con otras palabras, «es creciente», esto es, supongamos que

$$k(m) < k(n), \qquad \text{si } m < n.$$

La función compuesta $s \circ k$ está definida para todo entero $n \geq 1$, y para cada uno de tales n se tiene

$$(s \circ k)(n) = s_{k(n)}.$$

Una tal función compuesta se llama una *subsucesión* de s. De nuevo, por motivos de brevedad, utilizaremos a menudo, lo notación $\{s_{k(n)}\}$ o $\{s_{k_n}\}$ para designar la subsucesión de $\{s_n\}$ cuyo n-ésimo término es $s_{k(n)}$.

Ejemplo. Sea $s = \{1/n\}$ y sea k definida por $k(n) = 2^n$. Entonces $s \circ k = \{1/2^n\}$.

2.10 CONJUNTOS COORDINABLES (EQUIPOTENTES)

Definición 2.14. *Dos conjuntos A y B son coordinables, o equipotentes, y se escribe* $A \backsim B$ *si, y sólo si, existe una función uno a uno F cuyo dominio es el conjunto A y cuyo recorrido es el conjunto B.*

Se dice también que F establece una *correspondencia uno a uno* entre los conjuntos A y B. Es claro que cada conjunto A es coordinable consigo mismo (tomar como F la función «identidad» definida por $F(x) = x$ para todo x de A). Además, si $A \backsim B$ entonces $B \backsim A$, ya que si F es una función uno a uno que hace a A coordinable con B, entonces F^{-1} hará B coordinable con A. También, si $A \backsim B$ y si $B \backsim C$, entonces $A \backsim C$. (La demostración se deja al lector.)

2.11 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Se dice que un conjunto S es *finito* y que contiene n elementos si

$$S \sim \{1, 2, \ldots, n\}.$$

El entero n se llama *número cardinal* o simplemente *cardinal* de S. Es un ejercicio fácil demostrar que si $\{1, 2, \ldots, n\} \backsim \{1, 2, \ldots, m\}$ entonces $m = n$. Por

lo tanto, el cardinal de un conjunto finito está bien definido. El conjunto vacío se considera también finito. Su cardinal se define por 0.

Los conjuntos que no son finitos se llaman *infinitos.* La diferencia principal entre ambos es que un conjunto infinito puede ser semejante a alguno de sus subconjuntos propios, mientras que un conjunto finito nunca podrá ser semejante a uno de sus subconjuntos propios. (Ver ejercicio 2.13.) Por ejemplo, el conjunto $\mathbf{Z}^+$ de todos los enteros positivos es semejante al subconjunto propio $\{2, 4, 8, 16, \ldots\}$ formado por las potencias de 2. La función uno a uno F que los hace semejantes está definida por $F(x) = 2^x$ para cada x de $\mathbf{Z}^+$.

2.12 CONJUNTOS NUMERABLES Y NO NUMERABLES

Un conjunto S se dice que es *infinito numerable* si es coordinable con el conjunto de todos los enteros positivos; esto es, si

$$S \sim \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

En este caso existe una función f que establece una correspondencia uno a uno entre los enteros positivos y los elementos de S; por consiguiente, el conjunto S puede ser descrito como sigue:

$$S = \{f(1), f(2), f(3), \ldots\}.$$

A menudo se utilizan subíndices y $f(k)$ se designa por a_k (o por otra notación semejante) y se escribe, entonces, $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Lo importante aquí es que la correspondencia nos permite utilizar los enteros positivos como «etiquetas» de los elementos de S. Un conjunto infinito numerable se dice que tiene cardinal $\aleph_0$ (léase: *álef subcero*).

Definición 2.15. *Un conjunto S es numerable si es o bien finito o bien infinito numerable. Un conjunto que no sea numerable se llama no numerable.*

Las palabras *numerable* y *no numerable* son sustituidas a veces por *contable* y *no contable.*

Teorema 2.16. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.*

Demostración. Sea S un conjunto numerable dado y supongamos que $A \subseteq S$. Si A es finito, no hay nada que demostrar, por lo tanto podemos suponer que A es infinito (lo cual significa que S también lo es). Sea $s = \{s_n\}$ una sucesión infinita de términos todos distintos tal que

$$S = \{s_1, s_2, \ldots\}.$$

Se define una función en el conjunto de los enteros positivos como sigue:

Sea $k(1)$ el menor entero positivo m tal que $s_m \in A$. Suponiendo que $k(1)$, $k(2)$, ..., $k(n-1)$ han sido definidas, sea $k(n)$ el menor entero positivo $m > k(n-1)$ tal que $s_m \in A$. Entonces k conserva el orden: $m > n$ implica $k(m) > k(n)$. Se forma entonces la función compuesta $s \circ k$. El dominio de $s \circ k$ es el conjunto de los enteros positivos y el recorrido de $s \circ k$ es A. Además, $s \circ k$ es uno a uno, ya que

$$s[k(n)] = s[k(m)],$$

implica

$$s_{k(n)} = s_{k(m)},$$

que significa $k(n) = k(m)$, y esto implica $n = m$. Esto prueba el teorema.

2.13 EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES NO ES NUMERABLE

El siguiente teorema demuestra que existen conjuntos infinitos no numerables.

Teorema 2.17. *El conjunto de todos los números reales no es numerable.*

Demostración. Es suficiente demostrar que el conjunto de los x que satisfacen $0 < x < 1$ es no numerable. Si los números reales de este intervalo fuesen numerables, existiría una sucesión $s = \{s_n\}$ cuyos términos constituirían todo el intervalo. Probaremos que esto es imposible construyendo, dentro del intervalo, un número real que no sea término de esta sucesión. Una vez escritos los s_n como decimales infinitos:

$$s_n = 0.u_{n,1}u_{n,2}u_{n,3}\ldots,$$

donde cada $u_{n,i}$ es 0, 1, ..., o 9, consideramos el número real y cuya expresión decimal es

$$y = 0.v_1v_2v_3\ldots,$$

donde

$$v_n = \begin{cases} 1, & \text{si } u_{n,n} \neq 1, \\ 2, & \text{si } u_{n,n} = 1. \end{cases}$$

Entonces ningún término de la sucesión $\{s_n\}$ puede ser igual a y, ya que y difiere de s_1 en el primer decimal, de s_2 en el segundo decimal, ..., de s_n en el n-ésimo decimal. (Una situación como $s_n = 0{,}1999\ldots$ e $y = 0{,}2000\ldots$ no puede darse por la manera como han sido elegidas las v_n.) Como $0 < y < 1$, el teorema queda demostrado.

Definición 2.21. *Si F es una colección arbitraria de conjuntos, la intersección de F se define como el conjunto cuyos elementos son los elementos que pertenecen a todos los conjuntos de F, y se designa por*

$$\bigcap_{A \in F} A.$$

La intersección de dos conjuntos A_1 y A_2 se desgina por $A_1 \cap A_2$ y consta de los elementos comunes a ambos conjuntos. Si A_1 y A_2 no tienen elementos comunes, entonces $A_1 \cap A_2$ es el conjunto vacío y A_1 y A_2 se llaman *disjuntos*. Si F es una colección finita (como más arriba), se escribe

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$

y si F es una colección numerable, se escribe

$$\bigcap_{A \in F} A = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

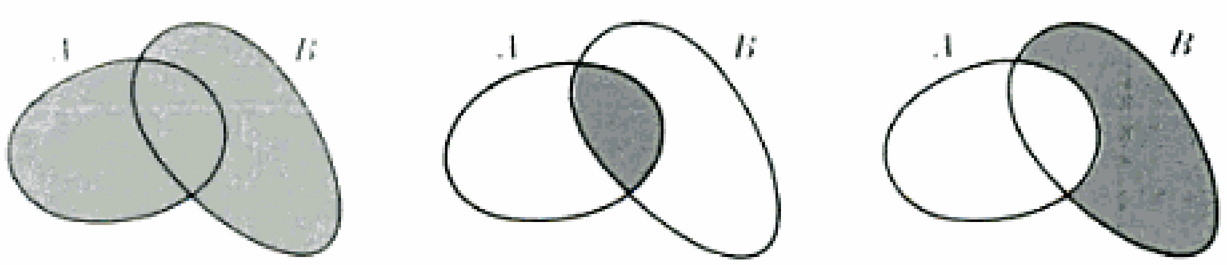
Si los conjuntos de la colección carecen de elementos comunes, su intersección es el conjunto vacío. Nuestras definiciones de reunión e intersección son, además, aplicables cuando F no es numerable. Por el modo como se han definido las reuniones y las intersecciones, las leyes conmutativas y asociativas se satisfacen automáticamente.

Definición 2.22. *El complemento de A relativamente a B, designado por $B - A$, se define como el conjunto*

$$B - A = \{x : x \in B, \text{ pero } \; x \notin A\}.$$

Nótese que $B - (B - A) = A$ siempre que $A \subseteq B$. Nótese también que $B - A = B$ si $B \cap A$ es vacío.

Las nociones de reunión, intersección, y complementario están ilustradas en la Fig. 2.4.



$A \cup B$ $\qquad$ $A \cap B$ $\qquad$ $B - A$

Figura 2.4

Teorema 2.23. *Sea F una colección de conjuntos. Entonces para cada conjunto B, se tiene*

$$B - \bigcup_{A\in F} A = \bigcap_{A\in F} (B - A),$$

y

$$B - \bigcap_{A\in F} A = \bigcup_{A\in F} (B - A).$$

Demostración. Sea $S = \bigcup_{A\in F} A$, $T = \bigcap_{A\in F} (B - A)$. Si $x \in B - S$, entonces $x \in B$, pero $x \notin S$. Por lo tanto, no es cierto que x pertenezca a uno, por lo menos, de los A de F; por lo tanto x no pertenece a ninguno de los A de F. Luego, para cada A de F, $x \in B - A$. Pero esto implica que $x \in T$, luego $B - S \subseteq T$. Deshaciendo los pasos, se obtiene que $T \subseteq B - S$, y esto demuestra que $B - S = T$. Para demostrar la segunda afirmación, utilizar un argumento semejante.

2.15 COLECCIONES NUMERABLES DE CONJUNTOS NUMERABLES

Definición 2.24. *Si F es una colección de conjuntos tal que, cada dos conjuntos de F distintos, son disjuntos, se dice entonces que F es una colección de conjuntos disjuntos.*

Teorema 2.25. *Si F es una colección numerable de conjuntos disjuntos, tal como* $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$, *en la que cada conjunto* A_n *es numerable, entonces la reunión* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ *es también numerable.*

Demostración. Sea $A_n = \{a_{1,n}, a_{2,n}, a_{3,n} \ldots\}$, $n = 1, 2, \ldots$, y sea $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ Entonces todo elemento x de S está en uno de los conjuntos de F y, por lo tanto, $x = a_{m,n}$ para un cierto par de enteros (m, n). El par (m, n) está unívocamente determinado por x, ya que F es una colección de conjuntos disjuntos. Por lo tanto la función f definida por $f(x) = (m, n)$ si $x = a_{m,n}$, $x \in S$, tiene dominio S. El recorrido $f(S)$ es un subconjunto de $Z^+ \times Z^+$ (donde Z^+ es el conjunto de los enteros positivos) y por lo tanto es numerable. Pero f es uno a uno y por consiguiente $S \backsim f(S)$, que equivale a decir que S es numerable.

Teorema 2.26. *Si* $F = \{A_1, A_2, \ldots\}$ *es una colección numerable de conjuntos, sea* $G = \{B_1, B_2, \ldots\}$, *donde* $B_1 = A_1$ *y, para* $n > 1$,

$$B_n = A_n - \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Una relación que sea reflexiva, simétrica y transitiva se llama *relación de equivalencia.* Determinar cuál de estas propiedades satisface S, si S es el conjunto de todos los pares de números reales (x, y) tales que

a) $x \le y$, b) $x < y$, c) $x < |y|$,
d) $x^2 + y^2 = 1$, e) $x^2 + y^2 < 0$, f) $x^2 + x = y^2 + y$.

2.3 Las siguientes funciones F y G están definidas para todo número real x por las ecuaciones dadas. En cada uno de los casos en que la función compuesta $G \circ F$ pueda definirse, dar el dominio de $G \circ F$ y una fórmula (o fórmulas) para $(G \circ F)(x)$.

a) $F(x) = 1 - x$, $G(x) = x^2 + 2x$.

b) $F(x) = x + 5$, $G(x) = |x|/x$, si $x \neq 0$, $G(0) = 1$.

c) $F(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{en los casos restantes,} \end{cases}$ $G(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$

Hallar $F(x)$ si $G(x)$ y $G[F(x)]$ vienen dados por:

d) $G(x) = x^3$, $G[F(x)] = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

e) $G(x) = 3 + x + x^2$, $G[F(x)] = x^2 - 3x + 5$.

2.4 Dadas tres funciones F, G, H, ¿qué restricciones deben imponerse a sus dominios para que las cuatro funciones compuestas que siguen estén definidas?

$$G \circ F, \qquad H \circ G, \qquad H \circ (G \circ F), \qquad (H \circ G) \circ F.$$

Suponiendo que sea posible definir $H \circ (G \circ F)$ y $(H \circ G) \circ F$, probar la ley asociativa

$$H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F.$$

2.5 Probar las siguientes identidades de la teoría de conjuntos para reuniones e intersecciones:

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $\quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

c) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$.

d) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

e) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

f) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.

g) $(A - B) \cup B = A$ si, y sólo si, $B \subseteq A$.

2.6 Sea $f: S \to T$ una función. Si A y B son subconjuntos arbitrarios de S, probar que

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \qquad \text{y} \qquad f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B).$$

Generalizar este resultado al caso de reuniones e intersecciones arbitrarias.

2.18 Sea S la colección de todas las sucesiones cuyos términos sean los enteros 0 y 1. Probar que S es no numerable.

2.19 Probar que los siguientes conjuntos son numerables:

a) el conjunto de todos los círculos del plano complejo de radio racional y de centro de coordenadas racionales,

b) toda colección de intervalos disjuntos de longitud positiva.

2.20 Sea f una función a valores reales definida para todo x del intervalo $0 \leq x \leq 1$. Supongamos que existe un número positivo M que verifica la siguiente propiedad: para cada elección, con un número finito de puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ del intervalo $0 \leq x \leq 1$, la suma

$$|f(x_1) + \cdots + f(x_n)| \leq M.$$

Sea S el conjunto de los x de $0 \leq x \leq 1$ para los que $f(x) \neq 0$. Probar que S es numerable.

2.21 Hallar la falacia de la siguiente «demostración» de que el conjunto de todos los intervalos de longitud positiva es numerable.

Sea $\{x_1, x_2, \ldots\}$ el conjunto numerable de todos los números racionales y sea I un intervalo de longitud positiva. Entonces I contiene una infinidad de puntos racionales x_n, pero de entre estos habrá uno que tendrá un *índice n mínimo*. Definimos una función F por medio de la ecuación $F(I) = n$, si x_n es el número racional de menor índice que pertenece al intervalo I. Esta función establece una correspondencia uno a uno entre el conjunto de todos los intervalos y un subconjunto de los enteros positivos. Por lo tanto el conjunto de todos los intervalos es numerable.

2.22 Sea S la colección de todos los subconjuntos de un conjunto dado T. Sea $f: S \to \mathbf{R}$ una función a valores reales definida en S. Se dice que la función f es *aditiva* si $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ siempre que A y B sean subconjuntos disjuntos de T. Si f es aditiva, probar que, para todo par de subconjuntos A y B, se tiene

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B - A) \qquad \text{y} \qquad f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B).$$

2.23 Aludimos al ejercicio 2.22. Suponemos que f es aditiva y suponemos además que las siguientes relaciones se verifican para dos subconjuntos particulares A y B de T:

$$f(A \cup B) = f(A') + f(B') - f(A')f(B')$$

$$f(A \cap B) = f(A)f(B), \qquad f(A) + f(B) \neq f(T),$$

donde $A' = T - A$, $B' = T - B$. Probar que estas relaciones determinan $f(T)$, y calcular el valor de $f(T)$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

2.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Funcions*. Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

2.2 Fraenkel, A., *Abstract Set Theory*, 3.ª ed. North-Holland, Amsterdam, 1965.
2.3 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis*. Addison-Wesley, Reading, 1966.
2.4 Halmos, P. R., *Naive Set Theory*. Van Nostrand, New York, 1960. (Hay traducción francesa. Ed. Gauthier Villars. Hay traducción castellana).
2.5 Kamke, E., *Theory of Sets*. F. Bagemihl, translator. Dover, New York, 1950.
2.6 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn and Bacon, Boston, 1972.
2.7 Rotman B., y Kneebone, G. T., *The Theory of Sets and Transfinite Numbers*. Elsevier, New York, 1968.

CAPÍTULO 3

Elementos de topología en conjuntos de puntos

3.1 INTRODUCCIÓN

La mayor parte del capítulo anterior trata de conjuntos «abstractos», esto es, conjuntos de objetos cualesquiera. En este capítulo consideraremos conjuntos de números reales, conjuntos de números complejos y, en general, conjuntos en espacios de más dimensiones.

En este estudio es conveniente y útil utilizar la terminología geométrica. Así, hablaremos de conjuntos de puntos de la recta real, conjuntos de puntos del plano, o conjuntos de puntos de espacios de mayor número de dimensiones. Más adelante estudiaremos funciones definidas en conjuntos de puntos, y es conveniente poseer un cierto conocimiento acerca de algunos tipos fundamentales de conjuntos de puntos, tales como conjuntos *abiertos*, conjuntos *cerrados* y conjuntos *compactos*, antes de abordar el estudio de las funciones. El estudio de estos conjuntos se llama *topología en conjuntos de puntos.*

3.2 EL ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbf{R}^n$

Un punto del espacio bidimensional es un par ordenado de números reales (x_1, x_2). Análogamente, un punto en un espacio tridimensional es una terna ordenada de números reales: (x_1, x_2, x_3). Es, pues, adecuado considerar una n-pla ordenada de números reales y referirnos a él como a un punto del espacio n-dimensional.

Definición 3.1. *Sea $n > 0$ un entero. Un conjunto ordenado de n números reales $(x_1, x\ , \ldots, x_n)$ se llama punto n dimensional o vector con n componentes. Los puntos o vectores se designarán por medio de una sola letra en negrita; por ejemplo,*

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

El número x_k se llama k-ésima coordenada del punto $\mathbf{x}$ *o k-ésima componente del vector* $\mathbf{x}$*. El conjunto de todos los puntos n-dimensionales se llama espacio euclídeo n-dimensional o simplemente n-espacio, y se designa por* $\mathbf{R}^n$.

Puede ocurrir que el lector se pregunte qué ventajas presenta trabajar en espacios de más de tres dimensiones. En realidad, el lenguaje de los n-espacios hace fácilmente comprensibles cuestiones más complicadas. El lector quizás esté lo suficientemente familiarizado con análisis vectorial de tres dimensiones, para percatarse de la ventaja que representa el poder escribir las ecuaciones de un movimiento que posee tres grados de libertad por medio de una sola ecuación vectorial en vez de tener que utilizar tres ecuaciones escalares. Existe una ventaja análoga cuando el sistema posee n grados de libertad.

Otra ventaja que se obtiene estudiando n-espacios para un n cualquiera es que, de una vez, se estudian todas las propiedades que son comunes a los 1-espacios, 2-espacios, 3-espacios, etc., esto es, propiedades independientes de la dimensión del espacio

Los espacios de más dimensiones se presentan como algo totalmente natural en campos tales como la Relatividad, y la Mecánica estadística y cuántica. Incluso espacios de infinitas dimensiones son corrientes en Mecánica cuántica.

Definiremos ahora las operaciones algebraicas con puntos n-dimensionales:

Definición 3.2. *Sean* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ *elementos de* $\mathbf{R}^n$. *Definimos:*

a) *Igualdad:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} \ \textit{si, y sólo si,}\ x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n.$$

b) *Suma:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

c) *Multpilicación por números reales (escalares):*

$$a\mathbf{x} = (ax_1, \ldots, ax_n) \qquad (a \textit{ real}).$$

d) *Diferencia:*

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}.$$

e) *Vector nulo u origen:*

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0).$$

f) *Producto interior o producto escalar:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

3.3 BOLAS ABIERTAS Y CONJUNTOS ABIERTOS DE $\mathbf{R}^n$

Sea $\mathbf{a}$ un punto de $\mathbf{R}^n$ y sea r un número positivo dado. El conjunto de todos los puntos $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ tales que

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r,$$

se denomina *n-bola* abierta de radio r y centro $\mathbf{a}$. Designamos este conjunto por $B(\mathbf{a})$ o por $B(\mathbf{a}; r)$.

La bola $B(\mathbf{a}; r)$ consta de todos los puntos cuya distancia a $\mathbf{a}$ es menor que r. En $\mathbf{R}^1$ este conjunto es un intervalo abierto con centro en $\mathbf{a}$. En $\mathbf{R}^2$ es un disco circular, y en $\mathbf{R}^3$ es una esfera sólida con centro en $\mathbf{a}$ y radio r.

3.5. *Definición de punto interior.* *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, y supongamos que $\mathbf{a} \in S$. Entonces $\mathbf{a}$ se denomina punto interior de S si existe una n-bola abierta con centro en $\mathbf{a}$, contenida en S.*

En otras palabras, cada uno de los puntos interiores $\mathbf{a}$ de S puede ser rodeado por una n-bola $B(\mathbf{a}) \subseteq S$. El conjunto de todos los puntos interiores de S se llama *interior* de S y se designa por int S. Cada conjunto que contiene una bola con centro en $\mathbf{a}$ se denomina *entorno* de $\mathbf{a}$.

3.6. *Definición de conjunto abierto.* *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es abierto si todos sus puntos son interiores. En otras palabras, S es abierto si, y sólo si, $S = int\ S$.* (Véase ejercicio 3.9.)

Ejemplos. En $\mathbf{R}^1$ el tipo más simple de conjunto abierto es un intervalo abierto. La unión de dos o más intervalos abiertos es también abierta. Un intervalo cerrado $[a, b]$ no es un conjunto abierto ya que sus extremos a y b no son puntos interiores del intervalo.

Ejemplos de conjuntos abiertos en el plano son: el interior de un disco; el producto cartesiano de dos intervalos abiertos unidimensionales. El lector debe tener en cuenta que un intervalo abierto de $\mathbf{R}^1$, considerado como subconjunto del plano, no es un conjunto abierto. De hecho, *ningún* subconjunto de $\mathbf{R}^1$ (salvo el conjunto vacío) puede ser abierto en $\mathbf{R}^2$, ya que tales conjuntos no pueden contener una 2-esfera.

En $\mathbf{R}^n$, tanto el conjunto vacío (¿Por qué?) como el mismo espacio $\mathbf{R}^n$, son conjuntos abiertos. El producto cartesiano

$$(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

de intervalos abiertos unidimensionales $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)$ es un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ llamado *intervalo abierto n-dimensional*. Lo designaremos por $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, donde $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

En otras palabras, un intervalo componente de S no puede ser un subconjunto propio de ningún otro intervalo abierto contenido en S.

Teorema 3.10. *Cada punto de un conjunto abierto no vacío S pertenece a un intervalo componente de S y a uno solo.*

Demostración. Supongamos que $x \in S$. Entonces x está contenido en algún intervalo abierto I con $I \subseteq S$. Existen muchos de tales intervalos pero el «mayor» de ellos será el intervalo componente deseado. Dejamos para el lector la demostración de que este intervalo es $I_x = (a(x), b(x))$, donde

$$a(x) = \inf \{a : (a, x) \subseteq S\}, \qquad b(x) = \sup \{b : (x, b) \subseteq S\}.$$

Puede ocurrir que $a(x)$ sea $-\infty$ y puede ocurrir que $b(x)$ sea $+\infty$. Es claro que no existe ningún intervalo abierto J tal que $I_x \subseteq J \subseteq S$, luego I_x es un intervalo componente de S que contiene a x. Si J_x fuese otro intervalo componente de S conteniendo a x, entonces la reunión $I_x \cup J_x$ sería un intervalo contenido en S y que contendría a I_x y a J_x. Por lo tanto, por definición de intervalo componente, se tendría $I_x \cup J_x = I_x$ e $I_x \cup J_x = J_x$, luego $I_x = J_x$.

Teorema 3.11 (Teorema de representación para los conjuntos abiertos de la recta real). *Cada conjunto abierto no vacío S de $\mathbf{R}^1$ es la reunión de una colección numerable de intervalos componentes de S, disjuntos.*

Demostración. Si $x \in S$, sea I_x el intervalo componente de S que contiene a x. La reunión de todos los intervalos I_x es, evidentemente, S. Si dos de ellos, I_x e I_y, tienen un punto en común, entonces su reunión $I_x \cup I_y$ es un intervalo abierto contenido en S y que contiene a I_x y a I_y. Por lo tanto, $I_x \cup I_y = I_x$ e $I_x \cup I_y = I_y$, luego $I_x = I_y$. Por lo tanto los intervalos I_x forman una colección disjunta.

Resta demostrar que forman una colección numerable. A este fin, supongamos que $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ designa el conjunto numerable de los números racionales. En cada intervalo componente I_x habrá una infinidad de x_n, pero entre ellos uno sólo con el menor índice n. Definiremos entonces una aplicación F por medio de la ecuación $F(I_x) = n$, si x_n es el número racional de I_x con el menor índice n. Esta función F es uno a uno ya que $F(I_x) = F(I_y) = n$ implica que I_x e I_y tienen en común a x_n y ello implica que $I_x = I_y$. Por tanto F establece una correspondencia uno a uno entre los intervalos I_x y un cierto subconjunto de los números naturales. Esto termina la demostración.

NOTA. Esta representación de S es única. De hecho, si S es reunión de intervalos abiertos disjuntos, entonces estos intervalos serán necesariamente los intervalos componentes de S. Es una consecuencia inmediata del teorema 3.10.

Si S es un intervalo abierto, entonces la representación contiene sólo un intervalo componente, a saber, S mismo. Por lo tanto, ningún intervalo abierto de $\mathbf{R}^1$ puede expresarse como reunión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos. Esta propiedad se designa también diciendo que un intervalo abierto es *conexo*. El concepto de conexión en conjuntos de $\mathbf{R}^n$ se estudia más ampliamente en la sección 4.16.

3.5 CONJUNTOS CERRADOS

3.12 Definición de conjunto cerrado. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es cerrado si su complementario $\mathbf{R}^n - S$ es abierto.*

Ejemplos. Un intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbf{R}^1$ es un conjunto cerrado. El producto cartesiano

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

de n intervalos cerrados unidimensionales es un conjunto cerrado de $\mathbf{R}^n$, llamado *intervalo cerrado* $[a, b]$ *n-dimensional.*

El siguiente teorema, consecuencia inmediata de los teoremas 3.7 y 3.8, muestra cómo construir nuevos conjuntos cerrados a partir de conjuntos cerrados dados.

Teorema 3.13. *La reunión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.*

Otra relación entre conjuntos abiertos y cerrados es la que expresa el siguiente teorema.

Teorema 3.14. *Si A es abierto y B cerrado, entonces $A - B$ es abierto y $B - A$ es cerrado.*

Demostración. Basta observar que $A - B = A \cap (\mathbf{R}^n - B)$ es la intersección de dos conjuntos abiertos, y que $B - A = B \cap (\mathbf{R}^n - A)$ es la intersección de dos conjuntos cerrados.

3.6 PUNTOS ADHERENTES. PUNTOS DE ACUMULACIÓN

Los conjuntos cerrados pueden definirse por medio de los puntos adherentes y por medio de los puntos de acumulación.

3.15 Definición de punto adherente. *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$, y sea $\mathbf{x}$ un punto de $\mathbf{R}^n$, no necesariamente de S. Entonces se dice que $\mathbf{x}$ es adherente a S si toda n-bola $B(\mathbf{x})$ contiene un punto de S, por lo menos.*

Ejemplos

1. Si $\mathbf{x} \in S$, entonces $\mathbf{x}$ es adherente a S, ya que cada n-esfera $B(\mathbf{x})$ contiene a $\mathbf{x}$.
2. Si S es un subconjunto de $\mathbf{R}$ acotado superiormente, entonces el sup S es adherente a S.

Ciertos puntos son adherentes a S porque cada bola $B(\mathbf{x})$ contiene puntos de S *distintos* de $\mathbf{x}$. Estos puntos se llamarán puntos de acumulación.

3.16. Definición de punto de acumulación. *Si $S \subseteq \mathbf{R}^n$ y $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, entonces $\mathbf{x}$ se llama punto de acumulación de S si cada n-bola $B(\mathbf{x})$ contiene por lo menos un punto de S distinto de $\mathbf{x}$.*

En otras palabras, $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de S si, y sólo si, $\mathbf{x}$ es adherente a $S - \{\mathbf{x}\}$. Si $\mathbf{x} \in S$ pero $\mathbf{x}$ no es un punto de acumulación de S, se dice que $\mathbf{x}$ es un *punto aislado* de S.

Ejemplos

1. El conjunto de los números de la forma $1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ tienen al cero como punto de acumulación.
2. El conjunto de los números racionales tiene a cada racional como punto de acumulación.
3. Cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$ es un punto de acumulación del conjunto de los números del intervalo abierto (a, b).

Teorema 3.17. *Si $\mathbf{x}$ es un punto de acumulación de S, entonces toda n-bola $B(\mathbf{x})$ contiene infinitos puntos de S.*

Demostración. Supongamos lo contrario; es decir, que exista una n-bola $B(\mathbf{x})$ que contenga sólo un número finito de puntos de S distintos de $\mathbf{x}$; llamémosles $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Si r es el menor de los números positivos

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_1\|, \qquad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_2\|, \qquad \ldots, \qquad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}_m\|,$$

entonces $B(\mathbf{x}; r/2)$ será una n-bola de centro $\mathbf{x}$ que no contendrá ningún punto de S distinto de $\mathbf{x}$. Contradicción.

Este teorema implica, en particular, que un conjunto que no posea una infinidad de puntos carece de puntos de acumulación. El recíproco, sin embargo, es falso. Por ejemplo, el conjunto de los enteros $\{1, 2, 3, \ldots\}$ es un conjunto infinito que carece de puntos de acumulación. En una sección posterior demostraremos que los conjuntos infinitos contenidos en una esfera po-

seen siempre un punto de acumulación. Éste es un resultado importante conocido como teorema de Bolzano-Weierstrass.

3.7. CONJUNTOS CERRADOS Y PUNTOS ADHERENTES

Un conjunto cerrado se ha definido como el complementario de un conjunto abierto. El teorema siguiente presenta otra definición de conjunto cerrado.

Teorema 3.18. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos adherentes.*

Demostración. Supongamos que S es cerrado y que $\mathbf{x}$ es adherente a S. Deseamos probar que $\mathbf{x} \in S$. Supongamos que $\mathbf{x} \notin S$ y llegaremos a una contradicción. Si $\mathbf{x} \notin S$, entonces $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - S$ y, como que $\mathbf{R}^n - S$ es abierto, alguna n-bola $B(\mathbf{x})$ está contenida en $\mathbf{R}^n - S$. Entonces $B(\mathbf{x})$ no contiene puntos de S, en contradicción con el hecho de que $\mathbf{x}$ es adherente a S.

Para probar el recíproco, supongamos que S contiene todos sus puntos adherentes y demostraremos entonces que S es cerrado. Sea $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n - S$. Entonces $\mathbf{x} \notin S$, luego $\mathbf{x}$ no es adherente a S. Por lo tanto, existe una bola $B(\mathbf{x})$ que no corta a S, por consiguiente $B(\mathbf{x}) \subseteq \mathbf{R}^n - S$. Así pues, $\mathbf{R}^n - S$ es abierto y, entonces, S es cerrado.

3.19. Definición de adherencia. *El conjunto de todos los puntos adherentes de un conjunto dado S se llama adherencia de S y se designa por $\bar{S}$.*

Para todo conjunto se tiene que $S \subseteq \bar{S}$ ya que todo punto de S es adherente a S. El teorema 3.18 prueba que la inclusión opuesta $\bar{S} \subseteq S$ se verifica si, y sólo si, S es cerrado. Por lo tanto se tiene:

Teorema 3.20. *Un conjunto S es cerrado si, y sólo si, $S = \bar{S}$.*

3.21. Definición de conjunto derivado. *El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto S se llama conjunto derivado de S y se designa por S'.*

Es claro que, para todo conjunto S, $\bar{S} = S \cup S'$. Por lo tanto, el teorema 3.20 implica que S es cerrado si, y sólo si, $S' \subseteq S$. En otras palabras, se tiene:

Teorema 3.22. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es cerrado si, y sólo si, contiene todos sus puntos de acumulación.*

Como S está acotado, S podrá ser incluido en una cierta n-bola $B(\mathbf{0}; a)$, $a > 0$, y por lo tanto en el intervalo n-dimensional J_1 definido por las desigualdades

$$-a \leq x_k \leq a \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Aquí J_1 designa el producto cartesiano

$$J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)};$$

esto es, el conjunto de puntos $(x_1, \dots, x_n)$, donde $x_k \in I_k^{(1)}$ y donde cada $I_k^{(1)}$ es un intervalo unidimensional $-a \leq x_k \leq a$. Cada intervalo $I_k^{(1)}$ se puede subdividir en dos subintervalos $I_{k,1}^{(1)}$ e $I_{k,2}^{(1)}$ definidos por las desigualdades

$$I_{k,1}^{(1)}: -a \leq x_k \leq 0; \qquad I_{k,2}^{(1)}: 0 \leq x_k \leq a.$$

Ahora, consideramos todos los productos cartesianos de la forma

$$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,k_n}^{(1)}, \tag{a}$$

donde cada $k_i = 1$ o 2. Hay, exactamente, 2^n productos de este tipo y, además, cada uno de ellos es un intervalo n-dimensional. La reunión de estos 2^n intervalos es el intervalo original J_1, que contiene a S; y por lo tanto, uno por lo menos de los 2^n intervalos (a) contiene una infinidad de puntos de S. Elijamos uno de los que verifican esta propiedad y llamémosle J_2; podrá expresarse también

$$J_2 = I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

donde cada $I_k^{(2)}$ es uno de los subintervalos de $I_k^{(1)}$ de longitud a. Procedamos ahora con J_2 de la misma manera como hemos procedido con J_1, dividiendo cada intervalo $I_k^{(2)}$ en dos partes iguales y obteniendo un intervalo n-dimensional J_3 que contenga una infinidad de puntos de S. Si continuamos este proceso, obtendremos una colección numerable de intervalos n-dimensionales $J_1, J_2, J_3, \dots$, tales que el intervalo m-ésimo J_m verifica la propiedad de contener un subconjunto infinito de S y se puede expresar en la forma

$$J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}, \qquad \text{donde } I_k^{(m)} \subseteq I_k^{(1)}.$$

Escribiendo

$$I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}],$$

tenemos

$$b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}} \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

3.26. Definición de recubrimiento. *Una colección de conjuntos F se denomina recubrimiento de un conjunto dado S si $S \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. Se dice también que la colección F recubre a S. Si F es una colección de conjuntos abiertos, entonces F se denomina recubrimiento abierto de S.*

Ejemplos

1. La colección de todos los intervalos de la forma $1/n < x < 2/n$, $(n = 2, 3, 4, \ldots)$, es un recubrimiento abierto del intervalo $0 < x < 1$. Es un ejemplo de recubrimiento numerable.
2. La recta real $\mathbf{R}^1$ está recubierta por la colección de todos los intervalos abiertos (a, b). Este recubrimiento es no numerable. Sin embargo, contiene un recubrimiento numerable de $\mathbf{R}^1$, a saber, todos los intervalos de la forma $(n, n+2)$, donde n recorre los valores enteros.
3. Sea $S = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$. La colección F de todos los discos circulares con centros en (x, x) y radios x, $x > 0$, es un recubrimiento de S. Este recubrimiento no es numerable. Sin embargo contiene un recubrimiento numerable de S, a saber, todos los círculos para los que x es racional. (Ver ejercicio 3.18.)

El teorema del recubrimiento de Lindelöf establece que todo recubrimiento abierto de un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ contiene una subcolección numerable que también recubre a S. La demostración utiliza el siguiente resultado preliminar:

Teorema 3.27. *Sea $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ la colección numerable de todas las n-bolas de radio racional y con centro en puntos de coordenadas racionales. Supongamos que $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y sea S un conjunto abierto de $\mathbf{R}^n$ que contenga a $\mathbf{x}$. Entonces una, por lo menos, de las n-bolas de G contiene a $\mathbf{x}$ y está contenida en S. Esto es, se tiene*

$$\mathbf{x} \in A_k \subseteq S \quad \textit{para algún } A_k \textit{ de } G.$$

Demostración. La colección G es numerable en virtud del teorema 2.27. Si $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ y si S es un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{x}$, entonces existe una n-bola $B(\mathbf{x}; r) \subseteq S$. Encontramos un punto $\mathbf{y}$ de S, de coordenadas racionales, «próximo» a $\mathbf{x}$ y, tomándolo como centro, hallaremos entonces un entorno en G interior a $B(\mathbf{x}; r)$ y que contenga a $\mathbf{x}$. Si

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

sea y_k un número racional tal que $|y_k - x_k| < r/(4n)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \leq |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| < \frac{r}{4}.$$

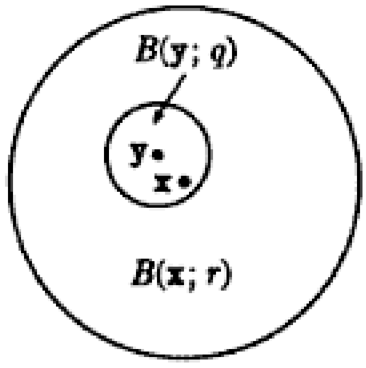


Figura 3.2

A continuación consideremos un número racional q tal que $r/4 < q < r/2$. Entonces $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y};\ q)$ y $B(\mathbf{y};\ q) \subseteq B(\mathbf{x};\ r) \subseteq S$. Pero $B(\mathbf{y};\ q) \in G$ y por lo tanto el teorema queda demostrado. (Ver Fig. 3.2 para el caso $\mathbf{R}^2$.)

Teorema 3.28 (teorema del recubrimiento de Lindelöf). *Supongamos que $A \subseteq \mathbf{R}^n$ y que F es un recubrimiento abierto de A. Entonces existe una subcolección numerable de F que también recubre a A.*

Demostración. Sea $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ la colección numerable de todas las n-bolas de centros y radios racionales. Este conjunto G se utilizará para extraer de F una subcolección numerable que recubra a A.

Supongamos que $\mathbf{x} \in A$. Entonces existe un conjunto abierto S de F tal que $x \in S$. Por el teorema 3.27, existe una n-bola A_k de G tal que $\mathbf{x} \in A_k \subseteq S$. Para cada S existe una infinidad numerable de tales A_k, pero sólo elegiremos una de entre todas, por ejemplo la de índice más pequeño; llamémosle $m =$ $= m(\mathbf{x})$. Tenemos entonces que $\mathbf{x} \in A_{m(\mathbf{x})} \subseteq S$. El conjunto de todas las n-bolas $A_{m(\mathbf{x})}$ obtenidas cuando $\mathbf{x}$ recorre todos los elementos de A es una colección numerable de conjuntos abiertos que recubre a A. A fin de lograr una subcolección numerable de F que recubra a A, hacemos corresponder a cada conjunto $A_{k(\mathbf{x})}$ uno de los conjuntos S de F que contenga a $A_{k(\mathbf{x})}$. Esto acaba la demostración.

3.11 TEOREMA DEL RECUBRIMIENTO DE HEINE-BOREL

El teorema del recubrimiento de Lindelöf establece que de un recubrimiento abierto de un conjunto arbitrario A de $\mathbf{R}^n$ se puede extraer un recubrimiento numerable. El teorema de Heine-Borel nos dice que si, además, A es cerrado y acotado, entonces podemos reducir el recubrimiento a un recubrimiento finito. La demostración requiere el teorema de encaje de Cantor.

Teorema 3.29 (Heine-Borel). *Sea F un recubrimiento abierto de un conjunto A de $\mathbf{R}^n$, cerrado y acotado. Entonces existe una subcolección finita de F que también recubre a A.*

Demostración. Una subcolección numerable de F, llamémosla $\{I_1, I_2, \ldots\}$, recubre a A, en virtud del teorema 3.28. Consideremos, para $m \geq 1$, la reunión finita

$$S_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k.$$

Es abierta, ya que es reunión de conjuntos abiertos. Probaremos que, para algún valor de m, la reunión S_m recubre a A.

A este fin consideremos el complementario $\mathbf{R}^n - S_m$, que es cerrado. Definimos una colección numerable de conjuntos $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ de la siguiente manera: $Q_1 = A$, y para $m > 1$,

$$Q_m = A \cap (\mathbf{R}^n - S_m).$$

Esto es, Q_m consta de todos los puntos de A que están fuera de S_m. Si podemos probar que, para algún valor de m, el conjunto Q_m es vacío, habremos demostrado que, para este valor de m, ningún punto de A está fuera de S_m; en otras palabras, habremos probado que existe un S_m que recubre a A.

Observemos las siguientes propiedades de los conjuntos Q_m: Cada conjunto Q_m es cerrado, ya que es intersección del conjunto cerrado A y el conjunto cerrado $\mathbf{R}^n - S_m$. Los conjuntos Q_m son decrecientes, ya que los conjuntos S_m son crecientes; esto es, $Q_{m+1} \subseteq Q_m$. Los conjuntos Q_m, por ser subconjuntos de A, están acotados. Por lo tanto, si ninguno de los conjuntos Q_m es vacío, podemos aplicar el teorema de encaje de Cantor para concluir que la intersección $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ tampoco es vacía. Ello implica la existencia de un cierto punto de A que pertenezca a todos los conjuntos Q_m, o, lo que es equivalente, la existencia de un punto de A que esté fuera de todos los conjuntos S_m. Pero esto es imposible, ya que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$. Por lo tanto algún Q_m debe ser vacío, y esto termina la demostración.

3.12 COMPACIDAD EN $\mathbf{R}^n$

Acabamos de ver que, si un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces todo recubrimiento abierto de S puede reducirse a un recubrimiento finito. Es natural preguntarse si podrían existir conjuntos distintos de los cerrados y acotados que verificasen también esta propiedad. Tales conjuntos se llamarán *compactos*.

3.30. Definición de conjunto compacto. *Un conjunto S de $\mathbf{R}^n$ se llama compacto si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una subcolección finita que también recubra a S.*

El teorema de Heine-Borel establece que todo conjunto de $\mathbf{R}^n$, cerrado y acotado, es compacto. Probaremos ahora el recíproco.

Teorema 3.31. *Sea S un subconjunto de $\mathbf{R}^n$. Entonces las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *S es compacto.*
b) *S es cerrado y acotado.*
c) *Todo subconjunto infinito de S tiene un punto de acumulación en S.*

Demostración. Como se indicó antes, (b) implica (a). Si probamos que (a) implica (b), que (b) implica (c) y que (c) implica (b), habremos establecido la equivalencia de las tres afirmaciones.

Supongamos que se verifica (a). Probaremos primero que S está acotado. Elijamos un punto $\mathbf{p}$ de S. La colección de n-bolas $B(\mathbf{p}; k)$, $k = 1, 2, \ldots$, es un recubrimiento abierto de S. Por compacidad, una subcolección finita también recubre a S y, por lo tanto, S está acotado.

A continuación probaremos que S es cerrado. Supongamos que no lo fuese. Existiría un punto $\mathbf{y}$ que sería un punto de acumulación de S y tal que $\mathbf{y} \notin S$. Si $\mathbf{x} \in S$, sea $r_{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/2$. Cada $r_{\mathbf{x}}$ es positivo ya que $\mathbf{y} \notin S$ y la colección $\{B(\mathbf{x}; r_{\mathbf{x}}): \mathbf{x} \in S\}$ es un recubrimiento abierto de S. Por compacidad, un número finito de estos entornos recubre a S, por lo que es

$$S \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} B(\mathbf{x}_k; r_k).$$

Designemos por r al menor de los radios $r_1, r_2, \ldots, r_p$. Es fácil comprobar que la bola $B(\mathbf{y}; r)$ no tiene puntos en común con ninguna de las bolas $B(\mathbf{x}_k; r_k)$. De hecho, si $\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}; r)$, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r \leq r_k$, y por la desigualdad triangular tenemos que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|$, luego

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \geq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_k\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 2r_k - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > r_k.$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} \notin B(\mathbf{x}_k; r_k)$. Resulta, pues, que $B(\mathbf{y}; r) \cap S$ es vacío, en contradicción con el hecho de que $\mathbf{y}$ es un punto de acumulación de S. Esta contradicción prueba que S es cerrado y, por lo tanto, que (a) implica (b).

Supongamos que se verifica (b). En este caso la demostración de (c) es inmediata, ya que si T es un subconjunto infinito de S, entonces T está acotado (puesto que S lo está), y por el teorema de Bolzano-Weierstrass T posee un punto de acumulación que llamaremos $\mathbf{x}$. Ahora bien, $\mathbf{x}$ es también punto de acumulación de S y por lo tanto $\mathbf{x} \in S$, dado que S es cerrado. Por todo lo cual (b) implica (c).

Supongamos que se verifica (c). Probaremos (b). Si S no estuviese acotado, entonces para cada $m > 0$ existiría un punto $\mathbf{x}_m$ de S tal que $\|\mathbf{x}_m\| > m$. La colección $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ constituiría un subconjunto infinito de S y entonces,

El número no negativo $d(x, y)$ puede considerarse como la distancia entre x e y. En estos términos el significado intuitivo de las propiedades 1 a 4 es claro. La propiedad 4 se llama la *desigualdad triangular*.

Un espacio métrico se designa, a menudo, por medio de (M, d) a fin de recalcar que en la definición de espacio métrico tanto el conjunto M como la métrica d juegan su papel.

Ejemplos

1. $M = \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Esta métrica se llama *métrica euclídea*. Cuando nos refiramos al espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, se sobreentenderá que su métrica es la euclídea si no se especifica alguna otra.
2. $M = \mathbf{C}$, el plano complejo; $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Como espacio métrico, $\mathbf{C}$ no se distingue del espacio euclídeo $\mathbf{R}^2$ puesto que consta de los mismos puntos y de la misma métrica.
3. M es un conjunto no vacío; $d(x, y) = 0$ si $x = y$, $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Esta métrica se llama *métrica discreta*, y (M, d) se llama *espacio métrico discreto*.
4. Si (M, d) es un espacio métrico y si S es un subconjunto no vacío de M, entonces (S, d) es también un espacio métrico con la misma métrica o, mejor aún, con la métrica resultante de restringir d a $S \times S$. Se llama a menudo la *métrica relativa* inducida por d sobre S, y S es un *subespacio métrico* de M. Por ejemplo, los números racionales $\mathbf{Q}$ con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ constituyen un subespacio métrico de $\mathbf{R}$.
5. $M = \mathbf{R}^2$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2}$, donde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. El espacio métrico (M, d) no es un subespacio del espacio euclídeo $\mathbf{R}^2$ ya que la métrica es distinta.
6. $M = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, la circunferencia unidad de $\mathbf{R}^2$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$ la longitud del menor de los arcos que sobre la circunferencia unidad unen a los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
7. $M = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$, es la superficie esférica unidad en $\mathbf{R}^3$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$ la menor de las longitudes de los arcos que, sobre la superficie esférica unidad, une a los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
8. $M = \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$.
9. $M = \mathbf{R}^n$; $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max\ \{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

3.14 TOPOLOGÍA EN ESPACIOS MÉTRICOS

Las nociones básicas de la topología en conjuntos de puntos se pueden extender a un espacio métrico arbitrario (M, d).

Si $a \in M$, la *bola* $B(a; r)$ de centro en a y radio $r > 0$ es el conjunto de todos los puntos x de M tales que

$$d(x, a) < r.$$

Algunas veces designaremos a esta bola por medio de $B_M(a; r)$ a fin de recalcar que sus puntos pertenecen a M. Si S es un subespacio métrico de M, la bola $B_S(a; r)$ es la intersección de S con la bola $B_M(a; r)$.

Teorema 3.34. *Sea (S, d) un subespacio métrico de (M, d) y sea Y un subconjunto de S. Entonces Y es cerrado en S si, y sólo si, $Y = B \cap S$ para algún conjunto B cerrado en M.*

Demostración. Si $Y = B \cap S$, donde B es cerrado en M, entonces $B = M - A$ donde A es abierto en M, luego $Y = S \cap B = S \cap (M - A) = S - A$; de ahí que Y sea cerrado en S.

Recíprocamente, si Y es cerrado en S, sea $X = S - Y$. Entonces X es abierto en S, luego $X = A \cap S$, donde A es abierto en M y

$$Y = S - X = S - (A \cap S) = S - A = S \cap (M - A) = S \cap B,$$

donde $B = M - A$ es cerrado en M.

Si $S \subseteq M$, un punto x de M se llama *punto adherente* de S si cada bola $B_M(x; r)$ contiene un punto de S, por lo menos. Si x es adherente de $S - \{x\}$, entonces se dice que x es un *punto de acumulación* de S. La *clausura* $\bar{S}$ de S es el conjunto de todos los puntos adherentes de S, y el *conjunto derivado* S' es el conjunto de todos los puntos de acumulación de S. Entonces, $\bar{S} = S \cup S'$.

Los teoremas que se dan a continuación son válidos en cada espacio métrico (M, d) y se demuestran exactamente igual a como se demostraron en el caso del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$. En las demostraciones, la distancia euclídea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ deberá ser reemplazada por la métrica $d(x, y)$.

Teorema 3.35. (a) *La reunión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta, y la intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

b) *La reunión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.*

Teorema 3.36. *Si A es abierto y B es cerrado, entonces $A - B$ es abierto y $B - A$ es cerrado.*

Teorema 3.37. *Para cada uno de los subconjuntos S de M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *S es cerrado en M.*
b) *S contiene a todos sus puntos adherentes.*
c) *S contiene a todos sus puntos de acumulación.*
d) *$S = \bar{S}$.*

Ejemplo. Sea $M = \mathbf{Q}$ el conjunto de números racionales con la métrica euclídea de $\mathbf{R}^1$. Sea S el conjunto de todos los números racionales en el intervalo abierto (a, b), donde tanto a como b son irracionales. Entonces S es un subconjunto cerrado de $\mathbf{Q}$.

En nuestras demostraciones del teorema de Bolzano-Weierstrass, del teorema de encaje de Cantor, y de los teoremas del recubrimiento de Lindelöf y de Heine-Borel hemos utilizado no sólo las propiedades métricas del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, sino también propiedades especiales de $\mathbf{R}^n$ que, en general, no son válidas en un espacio métrico arbitrario (M, d). Para poder extender estos teoremas a los espacios métricos habrá que imponer a M ciertas restricciones posteriores. Una de estas extensiones se esboza en el ejercicio 3.34.

La sección siguiente describe la compacidad en un espacio métrico arbitrario.

3.15 SUBCONJUNTOS COMPACTOS DE UN ESPACIO MÉTRICO

Sea (M, d) un espacio métrico y sea S un subconjunto de M. Una colección F de subconjuntos abiertos de M se llama *recubrimiento abierto* de S si $S \subseteq \bigcup_{A \in F} A$.

Un subconjunto S de M se llama *compacto* si cada recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito. S se dice que *está acotado* si $S \subseteq B(a; r)$ para algún $r > 0$ y algún a de M.

Teorema 3.38. *Sea S un subconjunto compacto de un espacio métrico M. Entonces:*

i) *S es cerrado y acotado.*
ii) *Cada subconjunto infinito de S posee un punto de acumulación en S.*

Demostración. Para demostrar (i) reharemos la demostración del teorema 3.31 y usaremos la parte de la argumentación que demostraba que (a) implica (b). El único cambio que debemos realizar consiste en reemplazar la distancia euclídea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ por la métrica $d(x, y)$ a lo largo de toda la demostración.

Para probar (ii) se procede por contradicción. Sea T un subconjunto infinito de S y supongamos que S no contiene ningún punto de acumulación de T. Entonces, para cada punto x de S, existirá una bola $B(x)$ que no contendrá ningún punto de T (si $x \notin T$) o un punto de T solamente (el mismo x, cuando $x \in T$). Cuando x recorre S, la reunión de estas bolas $B(x)$ es un recubrimiento abierto de S. Como S es compacto, una subcolección finita recubre a S y por lo tanto también recubre a T. Pero esto contradice el hecho de que T sea infinito y cada una de las bolas contenga a lo sumo un punto de T.

NOTA. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, cada una de las propiedades (i) y (ii) es equivalente a la compacidad (teorema 3.31). En un espacio métrico general, la propiedad (ii) es equivalente a la compacidad (para una demostración, ver la referencia 3.4), pero en cambio la propiedad (i) no lo es. El ejercicio 3.42 nos suministra un ejemplo de un espacio métrico M en el que ciertos subconjuntos cerrados y acotados no son compactos.

Teorema 3.39. *Sea X un subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto M. Entonces X es compacto.*

Demostración. Sea F un recubrimiento abierto de X, es decir $X \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. Probaremos que un número finito de los conjuntos A recubre a X. Como que X es cerrado su complementario $M - X$ es abierto, luego $F \cup \{(M - X)\}$ es un recubrimiento abierto de M. Pero M es compacto, luego este recubrimiento contiene un subrecubrimiento finito que podemos suponer que incluye $M - X$. Por lo tanto

$$M \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_p \cup (M - X).$$

Este subrecubrimiento recubre también a X y, como que $M - X$ no contiene puntos de X, podemos suprimir el conjunto $M - X$ del subrecubrimiento y, a pesar de todo, sigue recubriendo a X. Entonces $X \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_p$, luego X es compacto.

3.16 FRONTERA DE UN CONJUNTO

Definición 3.40. *Sea S un subconjunto de un espacio métrico M. Un punto x de M se llama punto frontera de S si cada bola $B_M(x; r)$ contiene, por lo menos, un punto de S y, por lo menos, un punto de $M - S$. El conjunto de todos los puntos frontera de S se llama frontera de S y se designa por ∂S.*

El lector puede verificar fácilmente que

$$\partial S = \bar{S} \cap \overline{M - S}.$$

Esta fórmula prueba que ∂S es cerrado en M.

Ejemplo. En $\mathbf{R}^n$, la frontera de una bola $B(\mathbf{a}; r)$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r$. En $\mathbf{R}^1$, la frontera del conjunto de los números racionales es todo en $\mathbf{R}^1$.

En los ejercicios y también en el capítulo 4 se desarrollan otras propiedades de los espacios métricos.

EJERCICIOS

Conjuntos abiertos y cerrados en $\mathbf{R}^1$ y $\mathbf{R}^2$

3.1 Probar que un intervalo abierto de $\mathbf{R}^1$ es un conjunto abierto y que un intervalo cerrado es un conjunto cerrado.

3.2 Determinar todos los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos de $\mathbf{R}^1$ y decidir cuándo los conjuntos son abiertos o cerrados (o cuándo no lo son).

a) Todos los enteros.
b) El intervalo $(a, b]$
c) Todos los números de la forma $1/n$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.
d) Todos los números racionales.
e) Todos los números de la forma $2^{-n} + 5^{-m}$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
f) Todos los números de la forma $(-1)^n + (1/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
g) Todos los números de la forma $(1/n) + (1/m)$, $(m, n = 1, 2, \ldots)$.
h) Todos los números de la forma $(-1)^n/[1+(1/n)]$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

3.3 Lo mismo que en el ejercicio 3.2 para los siguientes conjuntos de $\mathbf{R}^2$:

a) Todos los números complejos z tales que $|z| > 1$.
b) Todos los números complejos z tales que $|z| \geq 1$.
c) Todos los números complejos de la forma $(1/n) + (i/m), (m, n = 1, 2, \ldots)$.
d) Todos los puntos (x, y) tales que $x^2 - y^2 < 1$.
e) Todos los puntos (x, y) tales que $x > 0$.
f) Todos los puntos (x, y) tales que $x \geq 0$.

3.4 Probar que cada conjunto abierto no vacío S de $\mathbf{R}^1$ contiene números racionales e irracionales.

3.5 Probar que los únicos conjuntos de $\mathbf{R}^1$ que son a la vez abiertos y cerrados son el conjunto vacío y $\mathbf{R}^1$. ¿Existe una afirmación análoga para $\mathbf{R}^2$?

3.6 Probar que cada conjunto cerrado en $\mathbf{R}^1$ es la intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos.

3.7 Probar que un conjunto cerrado y acotado, no vacío, S de $\mathbf{R}^1$ o bien es un intervalo cerrado o bien S podrá obtenerse a partir de un intervalo cerrado suprimiendo una colección disjunta numerable de intervalos abiertos cuyos extremos pertenecen a S.

Conjuntos abiertos y cerrados de $\mathbf{R}^n$

3.8 Probar que las n-bolas abiertas y los intervalos abiertos n-dimensionales son conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^n$.

3.9 Probar que el interior de un conjunto de $\mathbf{R}^n$ es abierto en $\mathbf{R}^n$.

3.10 Si $S \subseteq \mathbf{R}^n$, probar que int S es la reunión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbf{R}^n$ que están contenidos en S. Esto se describe diciendo que int S es el mayor de los subconjuntos abiertos de S.

3.11 Si S y T son subconjuntos de $\mathbf{R}^n$, probar que

$$(\text{int } S) \cap (\text{int } T) = \text{int } (S \cap T), \qquad \text{y} \qquad (\text{int } S) \cup (\text{int } T) \subseteq \text{int } (S \cup T).$$

3.12 Sean S' y $\bar{S}$, respectivamente, el conjunto derivado y la clausura de un conjunto S de $\mathbf{R}^n$. Probar que:

a) S' es cerrado en $\mathbf{R}^n$; esto es, $(S')' \subseteq S'$.
b) Si $S \subseteq T$, entonces $S' \subseteq T'$.
c) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.
d) $(\bar{S})' = S'$.

3.23 Supongamos que $S \subseteq \mathbf{R}^n$. Un punto $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n-bola $B(\mathbf{x})$ tiene la propiedad que $B(\mathbf{x}) \cap S$ no es numerable. Probar que si S no es numerable, entonces existe un punto $\mathbf{x}$ en S de modo que $\mathbf{x}$ es un punto de condensación de S.

3.24 Supongamos que $S \subseteq \mathbf{R}^n$ y que S no es numerable. Sea T el conjunto de puntos de condensación de S. Probar que:

a) $S - T$ es numerable,
b) $S \cap T$ no es numerable,
c) T es un conjunto cerrado,
d) T no posee puntos aislados.

Nótese que el ejercicio 3.23 es un caso especial de (b).

3.25 Un conjunto de $\mathbf{R}^n$ se llama *perfecto* si $S = S'$, esto es, si S es un conjunto cerrado que carece de puntos aislados. Probar que, si F es un conjunto cerrado no numerable de $\mathbf{R}^n$, puede expresarse en la forma $F = A \cup B$, donde A es perfecto y B es numerable *(teorema de Cantor-Bendixon).*

Indicación. Utilizar el ejercicio 3.24.

Espacios métricos

3.26 Probar que, en todo espacio métrico (M, d), tanto el conjunto vacío $\emptyset$ como el espacio entero M son, a la vez, abiertos y cerrados.

3.27 Considerar en $\mathbf{R}^n$ las dos métricas siguientes:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|, \qquad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

En cada uno de los espacios métricos siguientes, probar que la bola $B(\mathbf{a}; r)$ tiene la apariencia geométrica que se indica:

a) en $(\mathbf{R}^2, d_1)$, un cuadrado de lados paralelos a los ejes de coordenadas.
b) en $(\mathbf{R}^2, d_2)$, un cuadrado cuyas diagonales son paralelas a los ejes.
c) Un cubo en $(\mathbf{R}^3, d_1)$.
d) Un octaedro en $(\mathbf{R}^3, d_2)$.

3.28 Sean d_1 y d_2 las métricas definidas en el ejercicio 3.27 y sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ la métrica euclídea usual. Comprobar que se verifican las siguientes desigualdades, cualesquiera que sean los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbf{R}^n$:

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \qquad \text{y} \qquad d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le \sqrt{n}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \le n d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

3.29 Si (M, d) es un espacio métrico, se define

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}.$$

Probar que d' también es una métrica para M. Obsérvese que $0 \le d'(x, y) < 1$ para todo x, y de M.

3.30 Probar que cada subconjunto finito de un espacio métrico es cerrado.

3.31 En un espacio métrico (M, d), el conjunto $\bar{B}(a; r) = \{x : d(x, a) \le r\}$ se llama *bola cerrada* de radio $r > 0$ y centro en el punto a de M.

3.46 a) $\text{int}\,(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (\text{int}\, A_i)$, donde cada $A_i \subseteq M$.

b) $\text{int}\,(\bigcap_{A \in F} A) \subseteq \bigcap_{A \in F} (\text{int}\, A)$, si F es una colección infinita de subconjuntos de M.

c) Dar un ejemplo en el que la igualdad de (b) no se verifique.

3.47 a) $\bigcup_{A \in F} (\text{int}\, A) \subseteq \text{int}\,(\bigcup_{A \in F} A)$.

b) Dar un ejemplo de una colección finita F que no satisfaga la igualdad en (a).

3.48 a) $\text{int}\,(\partial A) = \emptyset$ si A es abierto o si A es cerrado en M.

b) Dar un ejemplo para el que $\text{int}\,(\partial A) = M$.

3.49 Si $\text{int}\, A = \text{int}\, B = \emptyset$ y si A es cerrado en M, entonces $\text{int}\,(A \cup B) = \emptyset$.

3.50 Dar un ejemplo en el que $\text{int}\, A = \text{int}\, B = \emptyset$, pero para el que $\text{int}\,(A \cup B) = M$.

3.51 $\partial A = \bar{A} \cap \overline{M - A}$ y $\partial A = \partial(M - A)$.

3.52 Si $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, entonces $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

3.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions.* Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

3.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis,* Addison-Wesley, Reading, 1966.

3.3 Kaplansky, I., *Set Theory and Metric Spaces.* Allyn and Bacon, Boston, 1972.

3.4 Simmons, G .F., *Introduction to Topology and Modern Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1963.

CAPÍTULO 4

Límites y continuidad

4.1 INTRODUCCIÓN

Suponemos al lector ya familiarizado con el concepto de límites tal como es introducido en el Cálculo elemental donde es corriente presentar varios tipos de límites. Por ejemplo, el *límite de una sucesión* de números reales $\{x_n\}$, que simbolizamos cuando escribimos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,$$

significa que para cada número $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$|x_n - A| < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geq N.$$

Este límite pretende transmitir la idea intuitiva de que x_n puede estar suficientemente próximo a A en el supuesto de que n sea suficientemente grande. También se da el *límite de una función*, indicado por medio de la notación

$$\lim_{x\to p} f(x) = A,$$

que significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe otro número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - p| < \delta.$$

Esta definición expresa la idea de que $f(x)$ puede conseguirse tan próxima a A como queramos, siempre que x se tome lo suficientemente próximo a p.

Las aplicaciones del Cálculo a los problemas geométricos y físicos del espacio tridimensional y a las funciones de varias variables nos obligan a extender estos conceptos a $\mathbf{R}^n$. Es tan necesario como fácil dar un paso más e introducir límites en el marco más general de los espacios métricos. Esto simplifica la teoría puesto que elimina restricciones innecesarias y al mismo tiempo cubre casi todos los aspectos necesarios del Análisis.

Primeramente discutiremos los límites de las sucesiones de puntos de un espacio métrico y después discutiremos los límites de funciones y el concepto de continuidad.

4.2 SUCESIONES CONVERGENTES EN UN ESPACIO MÉTRICO

Definición 4.1. *Una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de un espacio métrico (S, d) es convergente si existe un punto p de S que satisfaga la siguiente propiedad:*

Para todo $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$d(x_n, p) < \varepsilon \qquad \textit{siempre que } n \geq N.$$

Diremos también que $\{x_n\}$ converge hacia p y escribiremos $x_n \to p$ cuando $n \to \infty$, o simplemente $x_n \to p$. Si no existe un tal número p de S, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ es divergente.

NOTA. La definición de convergencia implica que

$$x_n \to p \quad \text{si, y sólo si,} \quad d(x_n, p) \to 0.$$

La convergencia de la sucesión $\{d(x_n, p)\}$ hacia 0 se realiza en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$.

Ejemplos

1. En un espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$, una sucesión $\{x_n\}$ se llama *creciente* si $x_n \leq x_{n+1}$ para todo n. Si una sucesión creciente está acotada superiormente (esto es, si $x_n \leq M$ para un $M > 0$ y para todo n), entonces $\{x_n\}$ converge hacia el supremo de su recorrido, sup $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Análogamente, $\{x_n\}$ se llama *decreciente* si $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n. Cada sucesión decreciente acotada inferiormente converge hacia el ínfimo de su recorrido. Por ejemplo, $\{1/n\}$ converge hacia 0.
2. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son sucesiones reales que convergen hacia 0, entonces $\{a_n + b_n\}$ también converge hacia 0. Si $0 \leq c_n \leq a_n$ para todo n y si $\{a_n\}$ converge hacia 0, entonces $\{c_n\}$ también converge hacia 0. Estas propiedades elementales de las sucesiones de $\mathbf{R}^1$ pueden ser útiles para simplificar algunas de las demostraciones concernientes a límites de un espacio métrico general.
3. En el plano complejo $\mathbf{C}$, sea $z_n = 1 + n^{-2} + (2 - 1/n)i$. Entonces $\{z_n\}$ converge hacia $1 + 2i$ puesto que

$$d(z_n, 1 + 2i)^2 = |z_n - (1 + 2i)|^2 = \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^2} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty,$$

luego $d(z_n, 1+2i) \to 0$.

Teorema 4.2. *Una sucesión $\{x_n\}$ de un espacio métrico (S, d) puede converger hacia un punto de S, a lo sumo.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to p$ y que $x_n \to q$. Probaremos que $p = q$. En virtud de la desigualdad triangular se tiene

$$0 \leq d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q).$$

Como $d(p, x_n) \to 0$ y $d(x_n, q) \to 0$ se tiene que $d(p, q) = 0$, luego $p = q$.

Si una sucesión $\{x_n\}$ converge, el único punto hacia el que converge se llama *límite* de la sucesión y se designa por medio de lim x_n o por medio de $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ejemplo. En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$ tenemos que $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. La misma sucesión en el subespacio métrico $T = (0, 1]$ *no* converge puesto que el único candidato para el límite es 0 y $0 \notin T$. Este ejemplo muestra que la convergencia o divergencia de una sucesión depende tanto del espacio elegido como de la métrica.

Teorema 4.3. *En un espacio métrico (S, d), suponemos que $x_n \to p$ y que $T = \{x_1, x_2, \dots\}$ es el recorrido de $\{x_n\}$. Entonces:*
a) *T está acotado.*
b) *p es un punto de adherencia de T.*

Demostración. a) Sea N el entero que corresponde a $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia. Entonces todo x_n con $n \geq N$ está en la esfera $B(p; 1)$, luego cada punto de T está en la esfera $B(p; r)$, donde

$$r = 1 + \max\{d(p, x_1), \dots, d(p, x_{N-1})\}.$$

Por lo tanto, T está acotado.

b) Como cada esfera $B(p; \varepsilon)$ contiene un punto de T, p es adherente a T.

NOTA. Si T es *infinito*, cada bola $B(p; \varepsilon)$ contendrá una infinidad de puntos de T, luego p será punto de acumulación de T.

El teorema siguiente prueba el recíproco de la parte (b).

Teorema 4.4. *Dado un espacio métrico (S, d) y un subconjunto $T \subseteq S$, si p es un punto de S adherente de T, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de T que converge hacia p.*

Demostración. Para cada entero $n \geq 1$ existe un punto x_n de T tal que $d(p, x_n) \leq 1/n$. Por lo tanto $d(p, x_n) \to 0$, luego $x_n \to p$.

Teorema 4.5. *En un espacio métrico (S, d) una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia p si, y sólo si, cada subsucesión $\{x_{k(n)}\}$ converge hacia p.*

Demostración. Supongamos que $x_n \to p$ y consideremos una subsucesión $\{x_{k(n)}\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe un N tal que $n \geq N$ implica $d(x_n, p) < \varepsilon$. Como

$\{x_{k(n)}\}$ es una subsucesión, existe un entero M tal que $k(n) \geq N$ para $n \geq M$. Por lo tanto, $n \geq M$ implica $d(x_{k(n)}, p) < \varepsilon$, que prueba que $x_{k(n)} \to p$. El recíproco se verifica trivialmente, ya que $\{x_n\}$ es una subsucesión de sí misma.

4.3 SUCESIONES DE CAUCHY

Si una sucesión $\{x_n\}$ converge hacia el límite p, sus términos avanzados deben aproximarse a p y por lo tanto aproximarse entre sí. Esta propiedad está enunciada más formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 4.6. *Supongamos que $\{x_n\}$ converge en un espacio métrico (S, d). Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \textit{siempre que } n \geq N \textit{ y } m \geq N.$$

Demostración. Sea $p = \lim x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, sea N tal que $d(x_n, p) < \varepsilon/2$ siempre que $n \geq N$. Entonces $d(x_m, p) < \varepsilon/2$ si $m \geq N$. Si tanto n como m son mayores o iguales que N por la desigualdad triangular tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4.7. Definición de la sucesión de Cauchy. *Una sucesión $\{x_n\}$ de un espacio métrico se llama sucesión de Cauchy si satisface la siguiente condición (llamada la condición de Cauchy):*

Para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \textit{siempre que } n \geq N \textit{ y } m \geq N.$$

El teorema 4.6 establece que toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy. El recíproco, en general, es falso en un espacio métrico general. Por ejemplo, la sucesión $\{1/n\}$ es una sucesión de Cauchy en el subespacio euclídeo $T = (0, 1]$ de $\mathbf{R}^1$, pero en cambio dicha sucesión no converge en T. Sin embargo, el recíproco del teorema 4.6 es cierto en cada espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$.

Teorema 4.8. *En el espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$ toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Demostración. Sea $\{\mathbf{x}_n\}$ una sucesión de Cauchy de $\mathbf{R}^k$ y sea $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots\}$ el recorrido de la sucesión. Si T es finito, entonces todos los términos de $\{\mathbf{x}_n\}$ excepto un número finito son iguales y por lo tanto $\{\mathbf{x}_n\}$ converge hacia este valor común.

4.4 ESPACIOS MÉTRICOS COMPLETOS

Definición 4.9. *Un espcio métrico (S, d) se llama completo si toda sucesión de Cauchy de S converge en S. Un subconjunto T de S se llama completo si el subespacio métrico (T, d) es completo.*

Ejemplo 1. Cada uno de los espacios euclídeos $\mathbf{R}^k$ es completo (teorema 4.8). En particular, $\mathbf{R}^1$ es completo, pero el subespacio $T = (0, 1]$ no es completo.
Ejemplo 2. El espacio $\mathbf{R}^n$ con la métrica $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ es completo.

El teorema que damos a continuación relaciona la completitud con la compacidad.

Teorema 4.10. *En todo espacio métrico (S, d), cada subconjunto compacto T es completo.*

Demostración. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en T y sea $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ el recorrido de $\{x_n\}$. Si A es finito, entonces $\{x_n\}$ converge hacia uno de los puntos de A, luego $\{x_n\}$ converge en T.

Si A es infinito, el teorema 3.38 nos asegura que A admite un punto de acumulación p en T puesto que T es compacto. Probaremos ahora que $x_n \to p$. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos N tal que $n \ge N$ y $m \ge N$ implique $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$. La bola $B(p; \varepsilon/2)$ contiene un punto x_m con $m \ge N$. Por lo tanto si $n \ge N$ la desigualdad triangular nos conduce a

$$d(x_n, p) \le d(x_n, x_m) + d(x_m, p) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

luego $x_n \to p$. De lo cual se deduce que toda sucesión de Cauchy en T admite límite en T, luego T es completo.

4.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

En esta sección consideraremos dos espacios métricos (S, d_S) y (T, d_T), donde d_S y d_T designan las métricas respectivas. Sea A un subconjunto de S y sea $f\colon A \to T$ una función de A en T.

Definición 4.11. *Si p es un punto de acumulación de A y si $b \in T$, la notación*

$$\lim_{x \to p} f(x) = b, \tag{1}$$

si, y sólo si,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b, \tag{3}$$

para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A - \{p\}$ que sea convergente hacia p.

Demostración. Si se verifica (2), entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$d_T(f(x), b) < \varepsilon \quad \text{siempre que } x \in A \text{ y } 0 < d_S(x, p) < \delta. \tag{4}$$

Como p es adherente a $A - \{p\}$, por el teorema 4.4, existe una sucesión $\{x_n\}$ en $A - \{p\}$ convergente hacia p. Para el δ que interviene en (4), existe un entero N tal que $n \geq N$ implica $d_S(x_n, p) < \delta$. Entonces (4) implica que $d_T(f(x_n), b) < \varepsilon$ para $n \geq N$, y por lo tanto $\{f(x_n)\}$ converge hacia b. Así pues, (2) implica (3).

Para probar el recíproco supondremos que se verifica (3) y que (2) es falso, llegando a una contradicción. Si (2) es falso, entonces para algún $\varepsilon > 0$ y todo $\delta > 0$ existe un punto x de A (donde x puede depender de δ) tal que

$$0 < d_S(x, p) < \delta \quad \text{pero} \quad d_T(f(x), b) \geq \varepsilon. \tag{5}$$

Tomando $\delta = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, esto significa que existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $A - \{p\}$ tal que

$$0 < d_S(x_n, p) < 1/n \quad \text{pero} \quad d_T(f(x_n), b) \geq \varepsilon.$$

Es evidente entonces que hemos obtenido una sucesión $\{x_n\}$ que converge hacia p pero en cambio la sucesión $\{f(x_n)\}$ no converge hacia b, lo cual contradice a (3).

NOTA. Los teoremas 4.12 y 4.2 prueban que una función no puede tener dos límites diferentes cuando $x \to p$.

4.6 LÍMITES DE FUNCIONES CON VALORES COMPLEJOS

Sea (S, d) un espacio métrico, sea A un subconjunto de S, y consideremos dos funciones f y g definidas sobre A y con valores complejos,

$$f\colon A \to \mathbf{C}, \qquad g\colon A \to \mathbf{C}$$

La suma $f + g$ se define como la función cuyo valor en cada punto x de A es el número complejo $f(x) + g(x)$. La *diferencia* $f - g$, el *producto* $f \cdot g$, y el *cociente* f/g se definen análogamente. Es sabido que el cociente sólo está definido en aquellos puntos x en los que $g(x) \neq 0$.

Las reglas usuales para el cálculo con límites vienen dadas en el teorema que sigue.

Teorema 4.13. *Sean f y g dos funciones con valores complejos definidas en un subconjunto A de un espacio métrico (S, d). Sea p un punto de acumulación de A, y supongamos que*

$$\lim_{x \to p} f(x) = a, \qquad \lim_{x \to p} g(x) = b.$$

Entonces tendremos también:

a) $\lim_{x \to p} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b,$

b) $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = ab,$

c) $\lim_{x \to p} f(x)/g(x) = a/b$ *si* $b \neq 0.$

Demostración. Probaremos (b), dejando las otras partes como ejercicio. Dado ε con $0 < \varepsilon < 1$, sea ε' un segundo número que satisfaga $0 < \varepsilon' < 1$, que dependerá de ε en la forma que precisaremos más adelante. Existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $d(x, p) < \delta$, entonces

$$|f(x) - a| < \varepsilon' \qquad \text{y} \qquad |g(x) - b| < \varepsilon'.$$

Entonces

$$|f(x)| = |a + (f(x) - a)| < |a| + \varepsilon' < |a| + 1.$$

Haciendo $f(x)g(x) - ab = f(x)g(x) - bf(x) + bf(x) - ab$, tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &\le |f(x)|\,|g(x) - b| + |b|\,|f(x) - a| \\ &< (|a| + 1)\varepsilon' + |b|\varepsilon' = \varepsilon'(|a| + |b| + 1). \end{aligned}$$

Si elegimos $\varepsilon' = \varepsilon/(|a| + |b| + 1)$, veremos que $|f(x)g(x) - ab| < \varepsilon$ siempre que $x \in A$ y $d(x, p) < \delta$, y esto demuestra (b).

4.7 LÍMITES DE FUNCIONES CON VALORES VECTORIALES

De nuevo, sea (S, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de S. Consideremos dos funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$, definidas sobre A, con valores vectoriales tomados en $\mathbf{R}^k$,

$$\mathbf{f} : A \to \mathbf{R}^k, \qquad \mathbf{g} : A \to \mathbf{R}^k.$$

El cociente de funciones con valores vectoriales no está definido (si $k \geq 2$), pero es posible definir la *suma* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, el *producto* $\lambda\mathbf{f}$ (si λ es real) y el *producto escalar* $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$ por medio de las fórmulas

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x), \qquad (\lambda\mathbf{f})(x) = \lambda\mathbf{f}(x), \qquad (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)$$

para todo x de A. Se tienen entonces las siguientes reglas para calcular los límites de funciones con valores vectoriales.

Teorema 4.14. *Sea p un punto de acumulación de A y supongamos que*

$$\lim_{x\to p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}, \qquad \lim_{x\to p} \mathbf{g}(x) = \mathbf{b}.$$

Entonces se tiene también:

a) $\lim_{x\to p} [\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)] = \mathbf{a} + \mathbf{b}$,
b) $\lim_{x\to p} \lambda\mathbf{f}(x) = \lambda\mathbf{a}$ *para cada escalar* λ,
c) $\lim_{x\to p} \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$,
d) $\lim_{x\to p} \|\mathbf{f}(x)\| = \|\mathbf{a}\|$.

Demostración. Probaremos sólo las partes (c) y (d). Para probar (c) hagamos

$$\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = [\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}]\cdot[\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}] + \mathbf{a}\cdot[\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}] + \mathbf{b}\cdot[\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}].$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular nos dan

$$\begin{aligned} 0 &\le |\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \\ &\le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|\,\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{g}(x) - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|\,\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|. \end{aligned}$$

Cada uno de los términos de la derecha tiende a 0 cuando $x\to p$, luego $\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{g}(x)\to\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. Esto prueba (c). Para demostrar (d), obsérvese que

$$|\,\|\mathbf{f}(x)\| - \|\mathbf{a}\|\,| \le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\|.$$

NOTA. Sean $f_1, \ldots, f_n$ n funciones con valores reales definidas sobre A, y sea $\mathbf{f}: A \to \mathbf{R}^n$ la función con valores vectoriales definida por

$$\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)) \quad \text{si } x \in A.$$

Entonces $f_1, \ldots, f_n$ se llaman componentes de $\mathbf{f}$, y se escribe $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ para indicar dicha relación.

Si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces para cada $r = 1, 2, \ldots, n$ tenemos

$$|f_r(x) - a_r| \le \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\| \le \sum_{r=1}^{n} |f_r(x) - a_r|.$$

Estas desigualdades demuestran que $\lim_{x\to p} \mathbf{f}(x) = \mathbf{a}$ si, y sólo si, $\lim_{x\to p} f_r(x) = a_r$ para cada r.

4.8 FUNCIONES CONTINUAS

La definición de continuidad que se da en Cálculo elemental puede extenderse a funciones definidas de un espacio métrico a otro.

Definición 4.15. *Sean (S, d_S) y (T, d_T) espacios métricos y sea $f: S \to T$ una función de S en T. La función f se llama continua en un punto p de S si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon \quad \textit{siempre que } d_S(x, p) < \delta.$$

Si f es continua en todos los puntos del subconjunto A de S, se dice que f es continua en A.

Esta definición refleja la idea intuitiva de que puntos cercanos a p se aplican, por medio de f, en puntos cercanos a $f(p)$. Puede expresarse, también, en términos de bolas: una función f es continua en p sí, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f(B_S(p;\ \delta)) \subseteq B_T(f(p);\ \varepsilon).$$

Aquí $B_S(p;\ \delta)$ designa una bola de S; su imagen, por medio de f, debe estar contenida en la bola $B_T(f(p);\ \varepsilon)$ de T. (Ver Fig. 4.2.)

Si p es un punto de acumulación de S, la definición de continuidad implica que

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Si p es un punto aislado de S (un punto de S que no es de acumulación de S), entonces toda f definida en p será continua en p ya que para δ suficientemente pequeño existe un único x que satisface $d_S(x, p) < \delta$, a saber $x = p$, y $d_T(f(p), f(p)) = 0$.

Teorema 4.16. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro espacio métrico (T, d_T), y supongamos que $p \in S$. Entonces f es continua*

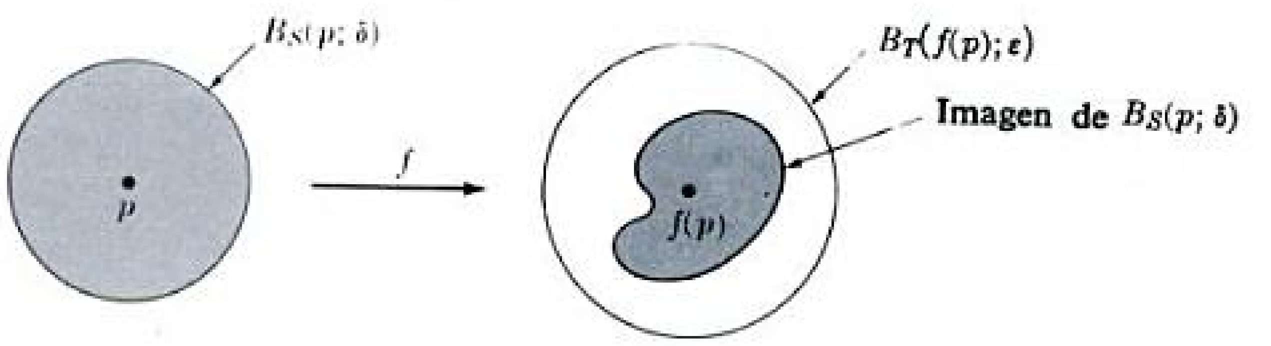


Figura 4.2

4.10 FUNCIONES COMPLEJAS Y FUNCIONES VECTORIALES, CONTINUAS

Teorema 4.18. *Sean f y g dos funciones con valores complejos, continuas en un punto p de un espacio métrico (S, d). Entonces $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son todas ellas continuas en p. El cociente f/g también es continuo en p si $g(p) \neq 0$.*

Demostración. El resultado es trivial si p es un punto aislado de S. Si p es un punto de acumulación de S, el resultado se sigue del teorema 4.13.

Existe, además, un teorema análogo para las funciones con valores vectoriales, que se demuestra de la misma manera, utilizando el teorema 4.14.

Teorema 4.19. *Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ dos funciones continuas en un punto p de un espacio métrico (S, d), y supongamos que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ toman sus valores en $\mathbf{R}^n$. Entonces cada una de las siguientes funciones es continua en p: la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, el producto $\lambda\mathbf{f}$ para cada número real λ, el producto escalar $\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$, y la norma $\|\mathbf{f}\|$.*

Teorema 4.20. *Sean $f_1, \ldots, f_n$, n funciones reales definidas sobre un subconjunto A de un espacio métrico (S, d_S) y sea $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$. Entonces $\mathbf{f}$ es continua en un punto p de A si, y sólo si, cada una de las funciones $f_1, \ldots, f_n$ es continua en p.*

Demostración. Si p es un punto aislado de A no hay nada que demostrar. Si p es un punto de acumulación, obsérvese que $\mathbf{f}(x) \to \mathbf{f}(p)$ cuando $x \to p$ si, y sólo si, $f_k(x) \to f_k(p)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$.

4.11 EJEMPLOS DE FUNCIONES CONTINUAS

Sea $S = \mathbf{C}$, el plano complejo. Es un ejercicio trivial demostrar que las siguientes funciones con valores complejos son continuas en $\mathbf{C}$:

a) las funciones constantes, definidas por $f(z) = c$ para todo z de $\mathbf{C}$;
b) la función identidad, definida por $f(z) = z$ para todo z de $\mathbf{C}$.

Aplicando repetidamente el teorema 4.18 se establece la continuidad de los polinomios

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

donde los a_i son números complejos.

Si S es un subconjunto de $\mathbf{C}$ en el que el polinomio f no se anula, entonces $1/f$ es continua en S. Por lo tanto una función racional g/f, donde g y f son

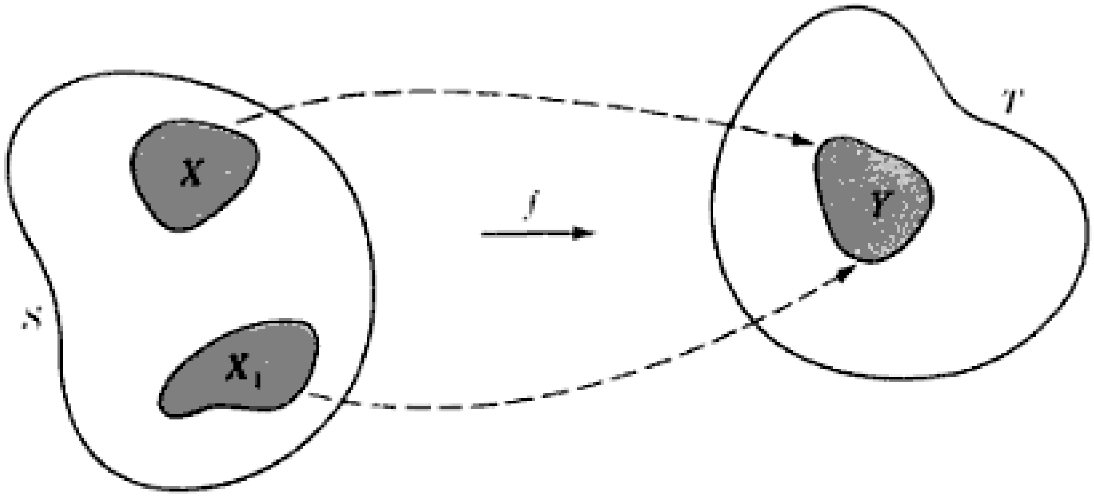


Figura 4.3

Nótese que las afirmaciones del teorema 4.22 pueden expresarse también de la siguiente manera:

$$f[f^{-1}(Y)] \subseteq Y, \qquad X \subseteq f^{-1}[f(X)].$$

Obsérvese asimismo que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ para todos los subconjuntos A y B de T.

Teorema 4.23. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Entonces f es continua en S si, y sólo si, para cada conjunto abierto Y de T, la antiimagen $f^{-1}(Y)$ es abierta en S.*

Demostración. Sea f continua sobre S, sea Y un abierto de T, y sea p un punto de $f^{-1}(Y)$. Probaremos que p es interior a $f^{-1}(Y)$. Sea $y = f(p)$. Como que Y es abierto entonces tenemos que $B_T(y;\ \varepsilon) \subseteq Y$ para un cierto $\varepsilon > 0$. Como que f es continua en p, existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_S(p;\ \delta)) \subseteq B_T(y;\ \varepsilon)$. Por lo tanto,

$$B_S(p; \delta) \subseteq f^{-1}[f(B_S(p; \delta))] \subseteq f^{-1}[B_T(y; \varepsilon)] \subseteq f^{-1}(Y),$$

luego p es un punto interior a $f^{-1}(Y)$.

Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(Y)$ es abierto en S para todo subconjunto abierto Y de T. Elijamos p en S y sea $y = f(p)$. Probaremos que f es continua en p. Para cada valor $\varepsilon > 0$, la bola $B_T(y;\ \varepsilon)$ es abierta en T, luego $f^{-1}(B_T(y;\ \varepsilon))$ es abierto en S. Ahora bien, si $p \in f^{-1}(B_T(y;\ \varepsilon))$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que $B_S(p;\ \delta) \subseteq f^{-1}(B_T(y;\ \varepsilon))$. Por consiguiente, $f(B_S(p;\ \delta)) \subseteq$ $\subseteq B_T(y;\ \varepsilon)$, luego f es continua en p.

Teorema 4.24. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Entonces f es continua en S si, y sólo si, para cada conjunto cerrado Y de T, la antiimagen $f^{-1}(Y)$ es cerrada en S.*

Demostración. Si Y es cerrado en T, entonces $T - Y$ es abierto en T y

$$f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y).$$

Aplíquese ahora el teorema 4.23.

Ejemplos. La imagen de un conjunto abierto por medio de una aplicación continua no es necesariamente abierta. Un contraejemplo muy simple es el de las funciones constantes que aplican todo S en un único punto de $\mathbf{R}^1$. Análogamente, la imagen de un conjunto cerrado en una aplicación continua no tiene por qué ser cerrada. Por ejemplo, la función real $f(x) = \operatorname{arctg} x$ aplica $\mathbf{R}^1$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

4.13 FUNCIONES CONTINUAS SOBRE CONJUNTOS COMPACTOS

El teorema que sigue prueba que la imagen de un conjunto compacto en una función continua es un conjunto compacto. Es otra de las propiedades globales de las funciones continuas.

Teorema 4.25. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Si f es continua en un subconjunto compacto X de S, entonces la imagen $f(X)$ es un subconjunto compacto de T; en particular, $f(X)$ es un conjunto cerrado y acotado de T.*

Demostración. Sea F un recubrimiento abierto de $f(X)$, es decir $f(X) \subseteq \bigcup_{A \in F} A$. Probaremos que un número finito de conjuntos A recubre a $f(X)$. Como f es continua sobre el subespacio métrico (X, d_S) podemos aplicar el teorema 4.23 para concluir que cada uno de los conjuntos $f^{-1}(A)$ es abierto en (X, d_S). Los conjuntos $f^{-1}(A)$ forman un recubrimiento abierto de X y, como X es compacto, un número finito de ellos recubre a X; sea $X \subseteq f^{-1}(A_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(A_p)$. Entonces

$$\begin{aligned} f(X) \subseteq f[f^{-1}(A_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_p)] &= f[f^{-1}(A_1)] \cup \cdots \cup f[f^{-1}(A_p)] \\ &\subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_p, \end{aligned}$$

luego $f(X)$ es compacto. Como corolario del teorema 3.38, vemos que $f(X)$ es cerrado y acotado.

Definición 4.26. *Una función $\mathbf{f}: S \to \mathbf{R}^k$ está acotada en S si existe un número positivo M tal que $\|\mathbf{f}(x)\| \leq M$ para todo x de S.*

Como f está acotada en S si y sólo si $f(S)$ es un subconjunto acotado de $\mathbf{R}^k$, tendremos el siguiente corolario del teorema 4.25.

Teorema 4.27. *Sea $f: S \to \mathbf{R}^k$ una función de un espacio métrico S en el espacio euclídeo $\mathbf{R}^k$. Si $\mathbf{f}$ es continua en un subconjunto X, compacto en S, entonces $\mathbf{f}$ está acotada en X.*

Este teorema posee importantes implicaciones en el caso de funciones reales. Si f es una función real, acotada sobre X, entonces $f(X)$ es un subconjunto de $\mathbf{R}$, acotado, luego posee supremo, $\sup f(X)$, e ínfimo, $\inf f(X)$. Además,

$$\inf f(X) \leq f(X) \leq \sup f(X) \quad \text{para cada } x \text{ de } X.$$

El próximo teorema prueba que una función continua f alcanza efectivamente los valores $\sup f(X)$ e $\inf f(X)$ si X es compacto.

Teorema 4.28. *Sea $f: S \to \mathbf{R}$ una función real de un espacio métrico S en el espacio euclídeo $\mathbf{R}$. Supongamos que f es continua en un subconjunto X, compacto en S. Entonces existen puntos p y q de X tales que*

$$f(p) = \inf f(X)$$

y

$$f(q) = \sup f(X).$$

NOTA. Como que $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ para todo x de X, los números $f(p)$ y $f(q)$ se llaman, respectivamente, los valores *mínimo* y *máximo* globales o absolutos de f en X.

Demostración. El teorema 4.25 demuestra que $f(X)$ es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbf{R}$. Sea $m = \inf f(X)$. Entonces m es adherente a $f(X)$ y, por ser $f(X)$ cerrado, $m \in f(X)$. Por lo tanto, $m = f(p)$ para un cierto p de X. Análogamente, $f(q) = \sup f(X)$ para un cierto q de X.

Teorema 4.29. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Supongamos que f es uno a uno sobre S, de modo que la función inversa f^{-1} existe. Si S es compacto y si f es continua en S, entonces f^{-1} es continua en $f(S)$.*

Demostración. Por el teorema 4.23 (aplicado a f^{-1}) bastará probar solamente que para cada conjunto cerrado X de S la imagen $f(X)$ es cerrada en T. (Obsérvese que $f(X)$ es la imagen inversa de X por medio de f^{-1}.) Como X es cerrado y S es compacto, X es compacto (por el teorema 3.39), luego $f(X)$ es compacto (por el teorema 4.25) y por lo tanto $f(X)$ es cerrado (por el teorema 3.38). Esto acaba la demostración.

Ejemplo. Este ejemplo muestra que la compacidad de S es esencial en el teorema 4.29. Sea $S = [0, 1)$ con la métrica usual de $\mathbf{R}^1$ y consideremos la función f con valores complejos definida por

$$f(x) = e^{2\pi i x} \quad \text{para } 0 \leq x < 1.$$

Ésta es una aplicación continua uno a uno del semi-intervalo abierto $[0, 1)$ en el círculo unidad $|z| = 1$ del plano complejo. Sin embargo, f^{-1} no es continua en el punto $f(0)$. Por ejemplo, si $x_n = 1 - 1/n$, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge hacia $f(0)$ pero $\{x_n\}$ no converge en S.

4.14 APLICACIONES TOPOLÓGICAS (HOMEOMORFISMOS)

Definición 4.30. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro (T, d_T). Supongamos también que f es uno a uno en S, de modo que la función inversa f^{-1} existe. Si f es continua sobre S y f^{-1} es continua sobre $f(S)$, entonces diremos que f es una aplicación topológica o un homeomorfismo, y los espacios métricos (S, d_S) y $(f(S), d_T)$ se llaman homeomorfos.*

Si f es un homeomorfismo, entonces f^{-1} también lo es. El teorema 4.23 prueba que un homeomorfismo aplica subconjuntos abiertos de S en subconjuntos abiertos de $f(S)$. Aplica asimismo subconjuntos cerrados de S en subconjuntos cerrados de $f(S)$.

Una propiedad de un conjunto que permanezca invariante frente a las distintas aplicaciones topológicas, se llama una *propiedad topológica.* Así pues, las propiedades de ser abierto, cerrado, compacto son propiedades topológicas.

Un ejemplo importante de homeomorfismo lo constituyen las *isometrías.* Se trata de una aplicación $f: S \to T$ que es uno a uno sobre S y que conserva la métrica; es decir,

$$d_T(f(x), f(y)) = d_S(x, y)$$

para todos los puntos x e y de S. Si existe una isometría de (S, d_S) en $(f(S), d_T)$, los dos espacios métricos se llaman *isométricos.*

Las aplicaciones topológicas son particularmente interesantes en la teoría de curvas. Por ejemplo, un *arco simple* es la imagen topológica de un intervalo, y una *curva cerrada simple* es la imagen topológica de una circunferencia.

4.15 TEOREMA DE BOLZANO

Esta sección está dedicada al famoso teorema de Bolzano que concierne a una propiedad global de las funciones reales continuas en intervalos compactos $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Si la gráfica de f está por encima del eje de las x en a y por debajo del eje de las x en b, el teorema de Bolzano afirma que la gráfica debe

$f(\alpha) \neq f(\beta)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ en el intervalo (α, β).

Demostración. Sea k un número comprendido entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ y apliquemos el teorema de Bolzano a la función g definida en $[\alpha, \beta]$ por medio de la ecuación $g(x) = f(x) - k$.

El teorema del valor intermedio, juntamente con el teorema 4.29, implican que la imagen cotinua de un intervalo compacto S por medio de una función real es otro intervalo compacto; a saber

$$[\inf f(S), \sup f(S)].$$

(Si f es constante en S, entonces el intervalo sería degenerado.) La sección siguiente extiende esta propiedad a escenarios más amplios de espacios métricos.

4.16 CONEXIÓN

En esta sección se describe el concepto de conexión y su relación con la continuidad.

Definición 4.34. *Un espacio métrico S se dice que es no conexo si $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos abiertos disjuntos de S, no vacíos. Diremos que S es conexo si no es no conexo.*

NOTA. Un subconjunto X de un espacio métrico S se llama conexo si, considerado como subespacio métrico de S, es un espacio métrico conexo.

Ejemplos

1. El espacio métrico $S = \mathbf{R} - \{0\}$ con la métrica usual euclídea es no conexo, ya que es unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos, los números positivos y los números reales negativos.
2. Cada intervalo abierto de $\mathbf{R}$ es conexo. Esto se demostró en la sección 3.4 como consecuencia del teorema 3.11.
3. El conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales, considerado como subespacio del espacio euclídeo $\mathbf{R}^1$, es no conexo. En efecto, $\mathbf{Q} = A \cup B$, donde A consta de todos los números racionales $< \sqrt{2}$ y B de todos los números racionales $> \sqrt{2}$. Análogamente, cada bola de $\mathbf{Q}$ es no conexa.
4. Cada espacio métrico S contiene subconjuntos no vacíos conexos. En efecto, para cada p de S el conjunto $\{p\}$ es conexo.

Para relacionar la conexión con la continuidad introduciremos el concepto de función a dos valores.

Ejemplo. Como un intervalo X de $\mathbf{R}^1$ es conexo, cada imagen continua $f(X)$ es conexa. Si f toma valores reales, la imagen $f(X)$ es otro intervalo. Si f toma valores en $\mathbf{R}^n$, la imagen $f(X)$ se llama *curva* de $\mathbf{R}^n$. Entonces, cada curva de $\mathbf{R}^n$ es conexa.

Como corolario al Teorema 4.37, tenemos el teorema siguiente que es una extensión del de Bolzano.

Teorema 4.38 (Teorema del valor intermedio para funciones reales continuas). *Sea f una función real continua definida en un subconjunto conexo S de $\mathbf{R}^n$. Si f alcanza dos valores distintos sobre S, tales como a y b, entonces para cada c comprendido entre a y b existe por lo menos un punto $\mathbf{x}$ de S en el que $f(\mathbf{x}) = c$.*

Demostración. La imagen $f(S)$ es un subconjunto conexo de $\mathbf{R}^1$. Por lo tanto, $f(S)$ es un intervalo que contiene a a y a b (ver ejercicio 4.38). Si algún valor c comprendido entre a y b no estuviese en $f(S)$, entonces $f(S)$ no sería conexo.

4.17 COMPONENTES DE UN ESPACIO MÉTRICO

Esta sección demuestra que todo espacio métrico S puede expresarse de forma única como reunión de «trozos» conexos, llamados componentes. Ante todo demostraremos el siguiente.

Teorema 4.39. *Sea F una colección de subconjuntos conexos de un espacio métrico S tal que la intersección $T = \bigcap_{A\in F} A$ es no vacía. Entonces, la reunión $U = \bigcup_{A\in F} A$ es conexa.*

Demostración. Como $T \neq \emptyset$, existe un t de T. Sea f una función a dos valores definida sobre U. Probaremos que f es constante en U probando que $f(x) = f(t)$ para todo x de U. Si $x \in U$, entonces $x \in A$ para un cierto A de F. Como A es conexo, f es constante sobre A y, como $t \in A$, $f(x) = f(t)$.

Todo punto x de un espacio métrico S pertenece, por lo menos, a un subconjunto conexo de S, a saber $\{x\}$. Por el teorema 4.39, la reunión de todos los subconjuntos conexos que contienen a x es también conexo. A esta reunión la llamaremos *componente* de S, y la designaremos por $U(x)$. Así, $U(x)$ es el subconjunto de S conexo maximal que contiene a x.

Teorema 4.40. *Todo punto de un espacio métrico S pertenece a una única y determinada componente de S. En otras palabras, las componentes de S forman una colección de conjuntos disjuntos cuya reunión es S.*

Demostración. Dos componentes distintas no pueden tener ningún punto x en común; en otro caso (por el teorema 4.39) su reunión sería un conjunto conexo más grande que contendría a x.

4.18 CONEXIÓN POR ARCOS

En esta sección se describe una propiedad especial, llamada *conexión por arcos,* que poseen algunos (pero no todos) los conjuntos conexos de un espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$.

Definición 4.41. *Un conjunto S de* $\mathbf{R}^n$ *se llama arco-conexo si, para cada par de puntos* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *de S, existe una función* $\mathbf{f}:[0, 1] \to S$ *tal que*

$$\mathbf{f}(0) = \mathbf{a} \qquad y \qquad \mathbf{f}(1) = \mathbf{b}.$$

NOTA. Una tal función se llama un *camino* de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Si $\mathbf{f}(0) \neq \mathbf{f}(1)$, la imagen de $[0, 1]$ por medio de $\mathbf{f}$ se denomina *arco,* que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{b}$. Entonces, S es arco-conexo si cada dos puntos distintos de S pueden unirse por medio de un arco contenido en S. Los conjuntos arco-conexos se llaman también *conexos por caminos.* Si $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a}$ para $0 \le t \le 1$, la curva que une $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se llama *segmento rectilineo.*

Ejemplos

1. Cada conjunto convexo de $\mathbf{R}^n$ es arco-conexo, ya que el segmento rectilíneo que une dos puntos del conjunto está en el conjunto. En particular, las bolas n-dimensionales abiertas y las cerradas son arco conexas.
2. El conjunto de la figura 4.4 (reunión de dos discos cerrados tangentes) es arco conexo.

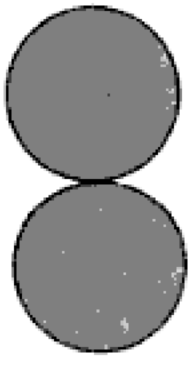


Figura 4.4

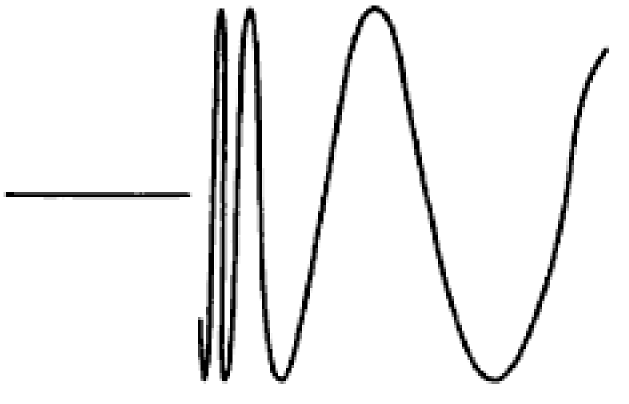


Figura 4.5

3. El conjunto de la figura 4.5 consiste en todos los puntos de la curva descrita por $y = \text{sen}\ (1/x)$, $0 < x \le 1$, y los del segmento horizontal $-1 \le x \le 0$. Este conjunto es conexo pero no arco conexo (ejercicio 4.46).

El teorema que sigue relaciona la conexión por arcos con la conexión.

Teorema 4.42. *Todo conjunto S de* $\mathbf{R}^n$ *arco-conexo es conexo.*

Demostración. Sea g una función a dos valores definida sobre S. Probaremos que g es constante sobre S. Elijamos un punto $\mathbf{a}$ de S. Si $\mathbf{x} \in S$, unamos $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x}$ por medio de un arco Γ contenido en S. Como que Γ es conexo, g es constante sobre Γ luego $g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{a})$. Pero, al ser $\mathbf{x}$ un punto arbitrario de S, queda demostrado que g es constante sobre S, y que S es conexo.

Hemos visto anteriormente que hay conjuntos conexos que no son arco conexos. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes en el caso de conjuntos ***abiertos.***

Teorema 4.43. *Un conjunto abierto conexo de* $\mathbf{R}^n$ *es arco-conexo.*

Demostración. Sea S un conjunto abierto y conexo de $\mathbf{R}^n$ y supongamos que $\mathbf{x} \in S$. Probaremos que $\mathbf{x}$ puede unirse con cualquier otro punto $\mathbf{y}$ de S por medio de un arco contenido en S. Designemos por A el subconjunto de S formado por los puntos que pueden unirse con $\mathbf{x}$, y sea $B = S - A$. Entonces $S = A \cup B$, donde A y B son disjuntos. Ahora demostraremos que tanto A como B son abiertos en $\mathbf{R}^n$.

Sea $\mathbf{a} \in A$ y unamos $\mathbf{a}$ con $\mathbf{x}$ por medio de un arco Γ contenido en S. Como que $\mathbf{a} \in S$ y S es abierto, existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{a}) \subseteq S$. Cada $\mathbf{y}$ de $B(\mathbf{a})$ puede unirse con $\mathbf{a}$ por medio de un segmento rectilíneo (contenido en S) y por lo tanto con $\mathbf{x}$ por medio de Γ. Así pues, si $\mathbf{y} \in B(\mathbf{a})$, entonces $\mathbf{y} \in A$. Esto implica que $B(\mathbf{a}) \subseteq A$, y por lo tanto A es abierto.

Para ver que B también es abierto, supongamos que $\mathbf{b} \in B$. Entonces existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{b}) \subseteq S$, ya que S es abierto. Ahora bien, si un punto $\mathbf{y}$ de $B(\mathbf{b})$ pudiese unirse con $\mathbf{x}$ por medio de un arco Γ', contenido en S, el punto $\mathbf{b}$ también podría unirse con $\mathbf{x}$, uniendo primeramente $\mathbf{b}$ con $\mathbf{y}$ (por medio de un segmento rectilíneo contenido en $B(\mathbf{b})$) y utilizando después Γ'. Pero como $\mathbf{b} \notin A$, ningún punto de $B(\mathbf{b})$ deberá pertenecer a A. Así, $B(\mathbf{b}) \subseteq B$, luego B es abierto.

Hemos obtenido, por lo tanto, una descomposición $S = A \cup B$, donde A y B son conjuntos de $\mathbf{R}^n$ abiertos y disjuntos. Pero, A es no vacío ya que $\mathbf{x} \in A$. Como que S es conexo, B deberá ser vacío, con lo cual $S = A$. Ahora bien, es evidente que A es arco-conexo ya que cualquier par de puntos de A pueden unirse por medio de un arco conveniente, uniendo primeramente cada uno de ellos con $\mathbf{x}$. Por consiguiente, S es arco-conexo y la demostración está terminada.

NOTA. Un camino $\mathbf{f}: [0, 1] \to S$ se llama *poligonal* si la imagen de $[0, 1]$ por medio de $\mathbf{f}$ es la reunión de un número finito de segmentos rectilíneos. El mis-

mo argumento utilizado para demostrar el teorema 4.43 prueba además que cada conjunto conexo de $\mathbf{R}^n$ es *conexo por poligonales*; es decir, cada par de puntos del conjunto puede unirse con un arco poligonal contenido en el conjunto.

Teorema 4.44. *Todo conjunto abierto S de $\mathbf{R}^n$ puede expresarse de forma única como reunión de una familia disjunta numerable de conjuntos conexos y abiertos.*

Demostración. Por el teorema 4.40, las componentes de S constituyen una colección de conjuntos disjuntos cuya reunión es S. Cada componente T de S es abierta, puesto que si $\mathbf{x} \in T$ existe una bola n-dimensional $B(\mathbf{x})$ contenida en S. Como $B(\mathbf{x})$ es conexo, $B(\mathbf{x}) \subseteq T$, luego T es abierto. Por el teorema de Lindelöf (teorema 3.28), las componentes de S constituyen una colección numerable, y por el teorema 4.40 la descomposición en componentes es única.

Definición 4.45. *Un conjunto de $\mathbf{R}^n$ se llama región si es la reunión de un conjunto conexo abierto con alguno, ninguno, o todos sus puntos frontera. Si ninguno de sus puntos frontera está incluido en la región, se dice que ésta es una región abierta. Si todos los puntos frontera están incluidos, se dice que la región es una región cerrada.*

NOTA. Algunos autores utilizan la palabra *dominio* en vez de *región abierta*, especialmente en el plano complejo.

4.19 CONTINUIDAD UNIFORME

Supongamos que f está definida en un cierto espacio métrico (S, d_S) y tiene sus valores en otro espacio métrico (T, d_T), y supongamos que f es continua en un subconjunto A de S. Entonces, dado un punto p de A y un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ (que depende de p y de ε) tal que, si $x \in A$, entonces

$$d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon \qquad \text{siempre que } d_S(x, p) < \delta.$$

En general no se debe esperar que, fijado ε, el mismo valor de δ sirva para *cada* punto p de A. Sin embargo, puede ocurrir. Cuando ocurre, se dice que la función es *uniformemente continua* en A.

Definición 4.46. *Sea $f: S \to T$ una función de un espacio métrico (S, d_S) en otro espacio métrico (T, d_T). Entonces se dice que f es uniformemente continua en un subconjunto A de S si verifica la siguiente condición:*

Consideremos la colección de las bolas $B_S(a; r/2)$ de radio $r/2$. Recubren a A y, como A es compacto, basta un número finito de ellas para recubrir a A, o sea

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} B_S\left(a_k; \frac{r_k}{2}\right).$$

En cualquiera de las bolas de doble radio, $B_S(a_k; r_k)$ se tiene

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{siempre que } x \in B_S(a_k; r_k) \cap A.$$

Sea δ el menor de los números $r_1/2, \ldots, r_m/2$. Probaremos que este δ satisface la definición de continuidad uniforme.

En efecto, consideremos dos puntos de A, por ejemplo x y p, con $d_S(x, p) < \delta$. En virtud de la anterior discusión existirá una bola $B_S(a_k; r_k/2)$ que contenga a x, luego

$$d_T(f(x), f(a_k)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por la desigualdad triangular tenemos que

$$d_S(p, a_k) \leq d_S(p, x) + d_S(x, a_k) < \delta + \frac{r_k}{2} \leq \frac{r_k}{2} + \frac{r_k}{2} = r_k.$$

Por lo tanto, $p \in B_S(a_k; r_k) \cap S$, y entonces tenemos también que

$$d_T(f(p), f(a_k)) < \varepsilon/2.$$

Utilizando, una vez más, la desigualdad triangular obtenemos

$$d_T(f(x), f(p)) \leq d_T(f(x), f(a_k)) + d_T(f(a_k), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Esto termina la demostración.

4.21 TEOREMA DEL PUNTO FIJO PARA CONTRACCIONES

Sea $f: S \to S$ una función de un espacio métrico (S, d) en sí mismo. Un punto p de S es un *punto fijo* de f si $f(p) = p$. La función f se denomina *contracción* de S si existe un número positivo $\alpha < 1$ (llamado *constante de contracción* o *coeficiente de contracción*), tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x, y) \qquad \text{para todo } x, y \text{ de } S. \tag{7}$$

4.22 DISCONTINUIDADES DE LAS FUNCIONES REALES

El resto de este capítulo lo dedicaremos a estudiar propiedades especiales de funciones reales definidas en subintervalos de $\mathbf{R}$.

Sea f una función real definida sobre un intervalo (a, b). Supongamos que $c \in [a, b)$. Si $f(x) \to A$ cuando $x \to c$ con valores mayores que c, diremos que A es el *límite lateral por la derecha* de f en c y lo indicaremos, escribiendo

$$\lim_{x \to c+} f(x) = A.$$

El límite lateral por la derecha se designa también por medio de $f(c+)$. En la terminología ε, δ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c+)| < \varepsilon \qquad \text{siempre que } c < x < c + \delta < b.$$

Nótese que f no necesita estar definida en el punto c. Si f está definida en c y es $f(c+) = f(c)$, diremos que f es *continua por la derecha* en c.

Los límites laterales por la izquierda y la continuidad por la izquierda en c se definen análogamente si $c \in (a, b]$.

Si $a < c < b$, entonces f es continua en c si, y sólo si,

$$f(c) = f(c+) = f(c-).$$

Diremos que c es una *discontinuidad* de f, si f no es continua en c. En este caso deberá darse alguna de las siguientes condiciones:

a) O no existe $f(c+)$ o no existe $f(c-)$.
b) Tanto $f(c+)$ como $f(c-)$ existen pero son distintos.
c) Tanto $f(c+)$ como $f(c-)$ existen y $f(c+) = f(c-) \neq f(c)$.

En el caso (c) se dice que el punto c es una *discontinuidad evitable*, ya que la discontinuidad podría evitarse volviendo a definir f en c de suerte que el valor de f en c fuese $f(c+) = f(c-)$. En los casos (a) y (b), se dice que c es una *discontinuidad inevitable* dado que la discontinuidad no puede evitarse aunque volvamos a definir f en c.

Definición 4.49. *Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(c+)$ y $f(c-)$ existen en un punto interior c, entonces:*

a) *$f(c) - f(c-)$ se llama el salto de f a la izquierda de c,*
b) *$f(c+) - f(c)$ se llama el salto de f a la derecha de c,*
c) *$f(c+) - f(c-)$ se llama el salto de f en c.*

Si alguno de ellos es distinto de 0, entonces se dice que f tiene una discontinuidad de salto en c.

En los puntos extremos a y b, sólo consideraremos uno de los saltos laterales, el salto a la derecha en a, $f(a+)-f(a)$, y el salto a la izquierda en b, $f(b)-f(b-)$.

Ejemplos

1. La función f definida por $f(x)=x/|x|$ si $x\neq 0$, $f(0)=A$, tiene una discontinuidad de salto en 0, independiente del valor de A. Aquí $f(0+)=+1$ y $f(0-)=-1$. (Ver fig. 4.6.)
2. La función f definida por $f(x)=1$ si $x\neq 0$, $f(0)=0$, posee un salto de discontinuidad evitable en 0. En este caso $f(0+)=f(0-)=1$.

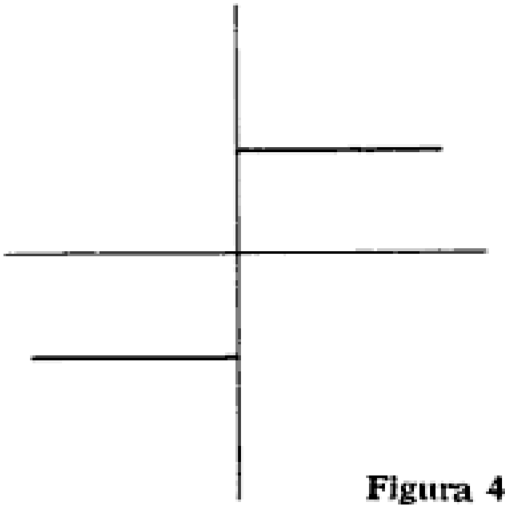


Figura 4.6

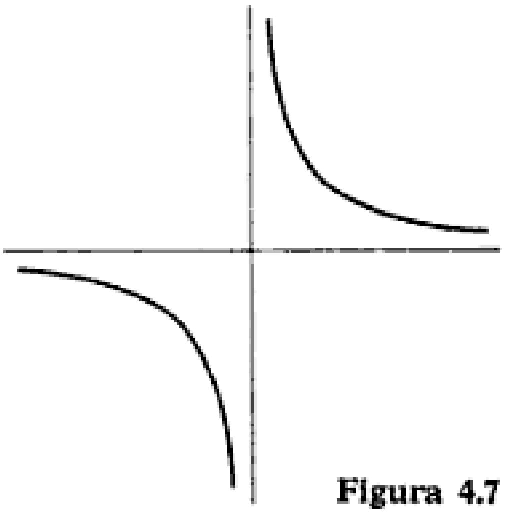


Figura 4.7

3. La función f definida por $f(x)=1/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=A$, tiene un punto de discontinuidad inevitable en 0. En este caso $f(0+)$ y $f(0-)$ no existen. (Ver fig. 4.7.)
4. La función f definida por $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=A$, posee una discontinuidad inevitable en 0 ya que $f(0+)$ y $f(0-)$ no existen. (Ver fig. 4.8.)
5. La función f definida por $f(x)=x\operatorname{sen}(1/x)$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$, tiene un punto de discontinuidad evitable en 0, ya que $f(0+)=f(0-)=0$. (Ver fig. 4.9.)

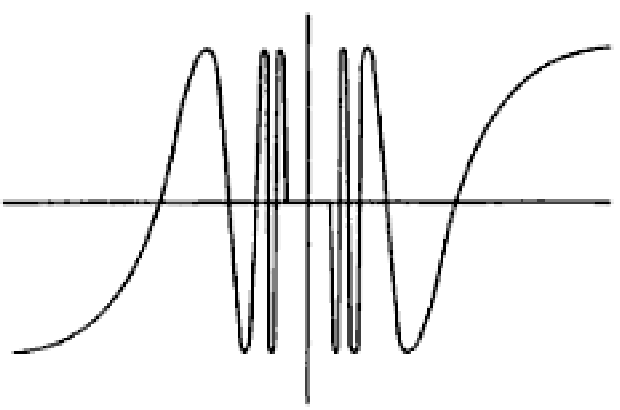


Figura 4.8

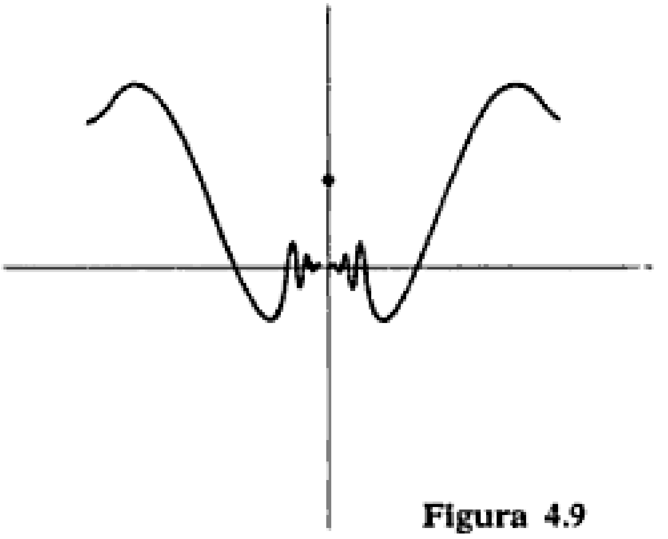


Figura 4.9

Teorema 4.52. *Sea f estrictamente creciente en un conjunto S de* **R**. *Entonces f^{-1} existe y es estrictamente creciente en $f(S)$.*

Demostración. Como f es estrictamente creciente, es uno a uno en S, luego f^{-1} existe. Para ver que f^{-1} es estrictamente creciente, sean $y_1 < y_2$ dos puntos de $f(S)$ y sea $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. No puede ser que $x_1 \geq x_2$, ya que entonces tendríamos también que $y_1 \geq y_2$. La única alternativa es $x_1 < x_2$, y esto significa que f^{-1} es estrictamente creciente.

El teorema 4.52 junto con el teorema 4.29 conducen a:

Teorema 4.53. *Sea f estrictamente creciente y continua en un intervalo compacto $[a, b]$. Entonces f^{-1} es continua y estrictamente creciente en el intervalo $[f(a), f(b)]$.*

NOTA. El teorema 4.53 nos dice que una función continua, estrictamente creciente es una aplicación topológica. Recíprocamente, toda aplicación topológica de un intervalo $[a, b]$ sobre un intervalo $[c, d]$ debe ser una función estrictamente monótona. La verificación de este hecho constituye un ejercicio muy instructivo para el lector. (Ejercicio 4.62.)

EJERCICIOS

Límites de sucesiones

4.1 Probar cada una de las afirmaciones siguientes acerca de sucesiones de **C**.

a) $z^n \to 0$ si $|z| < 1$; $\{z^n\}$ diverge si $|z| > 1$.

b) Si $z_n \to 0$ y si $\{c_n\}$ está acotada, entonces $\{c_n z_n\} \to 0$.

c) $z^n/n! \to 0$ para cada complejo z.

d) Si $a_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$, entonces $a_n \to 0$.

4.2 Si $a_{n+2} = (a_{n+1} + a_n)/2$ para todo $n \geq 1$, expresar a_n en función de a_1 y a_2, y demostrar que $a_n \to (a_1 + 2a_2)/3$. *Observación:* $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$.

4.3 Si $0 < x_1 < 1$ y si $x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n}$ para todo $n \geq 1$, probar que $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente con límite 0. Probar además que $x_{n+1}/x_n \to \frac{1}{2}$.

4.4 Dos sucesiones de enteros positivos $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ se definen recursivamente haciendo $a_1 = b_1 = 1$ e igualando las partes racionales e irracionales de la ecuación

$$a_n + b_n\sqrt{2} = (a_{n-1} + b_{n-1}\sqrt{2})^2 \quad \text{para } n \geq 2.$$

Probar que $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$ para $n \geq 2$. Deducir que $a_n/b_n \to \sqrt{2}$ por medio de valores $> \sqrt{2}$, y que $2b_n/a_n \to \sqrt{2}$ por medio de valores $< \sqrt{2}$.

4.5 Una sucesión real $\{x_n\}$ satisface $7x_{n+1} = x_n^3 + 6$ para $n \geq 1$. Si $x_1 = \frac{1}{2}$, probar que la sucesión crece y hallar su límite. ¿Qué ocurre si $x_1 = \frac{3}{2}$ o si $x_1 = \frac{5}{2}$?

4.6 Si $|a_n| < 2$ y $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{8}|a_{n+1}^2 - a_n^2|$ para todo $n \geq 1$, probar que $\{a_n\}$ converge.

4.7 En un espacio métrico (S, d) suponemos que $x_n \to x$ y que $y_n \to y$. Probar que $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

4.8 Probar que en un espacio métrico compacto (S, d), cada sucesión de S admite una subsucesión convergente en S. Esta propiedad implica también que S es compacto, pero no se pide una demostración de este resultado. (Una demostración puede encontrarse en las referencias 4.2 o 4.3.)

4.9 Sea A un subconjunto de un espacio métrico S. Si A es completo, probar que A es cerrado. Probar que el recíproco también es cierto siempre que S sea completo.

Límites de funciones

NOTA. En los ejercicios 4.10 a 4.28 todas las funciones serán reales.

4.10 Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que $x \in (a, b)$. Consideremos las dos afirmaciones siguientes:

a) $\lim_{h \to 0} |f(x + h) - f(x)| = 0$; b) $\lim_{h \to 0} |f(x + h) - f(x - h)| = 0$.

Probar que (a) siempre implica (b), y dar un ejemplo en el que (b) se verifique pero (a) no.

4.11 Sea f definida en $\mathbf{R}^2$. Si

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = L$$

y si existen los dos límites unidimensionales $\lim_{x \to a} f(x, y)$ y $\lim_{y \to b} f(x, y)$, probar que

$$\lim_{x \to a} [\lim_{y \to b} f(x, y)] = \lim_{y \to b} [\lim_{x \to a} f(x, y)] = L.$$

Consideremos ahora las funciones f definidas en $\mathbf{R}^2$ como sigue:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = \dfrac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x - y)^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen}(xy)$ si $x \neq 0$, $f(0, y) = y$.

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x + y) \operatorname{sen}(1/x) \operatorname{sen}(1/y) & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0. \end{cases}$

e) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} & \text{si } \operatorname{tg} x \neq \operatorname{tg} y, \\ \cos^3 x & \text{si } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

En cada uno de los ejercicios anteriores, determinar cuándo existen los límites que se proponen y calcular los que existan:

$$\lim_{x\to 0}\,[\lim_{y\to 0} f(x, y)]\,; \qquad \lim_{y\to 0}\,[\lim_{x\to 0} f(x, y)]\,; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y).$$

4.12 Si $x \in [0, 1]$ probar que el siguiente límite existe,

$$\lim_{m\to\infty}\,[\lim_{n\to\infty} \cos^{2n}(m!\,\pi x)]\,,$$

y que su valor es 0 o 1, según que x sea irracional o racional.

Continuidad de funciones reales

4.13 Sea f continua en $[a, b]$ y sea $f(x) = 0$ si x es racional. Probar que $f(x) = 0$ para todo x de $[a, b]$.
4.14 Sea f continua en el punto $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbf{R}^n$. Conservemos $a_2, a_3, \ldots, a_n$ fijos y definamos una nueva función g de una sola variable real definida por la ecuación

$$g(x) = f(x, a_2, \ldots, a_n).$$

Probar que g es continua en el punto $x = a_1$. (Este resultado suele expresarse diciendo que *una función continua de n variables es continua en cada una de ellas separadamente*.)
4.15 Probar por medio de un ejemplo que el recíproco de la proposición establecida en el ejercicio 4.14 no es verdadero en general.
4.16 Sean f, g y h definidas en $[0, 1]$ como sigue:

$f(x) = g(x) = h(x) = 0$, siempre que x sea irracional;
$f(x) = 1$ y $g(x) = x$, siempre que x sea racional;
$h(x) = 1/n$, si x es el racional m/n (irreducible);
$h(0) = 1$.

Probar que f no es continua en ningún punto de $[0, 1]$, que g es continua sólo en $x = 0$, y que h sólo es continua en los puntos irracionales de $[0, 1]$.
4.17 Para cada x de $[0, 1]$, sea $f(x) = x$ si x es racional, y sea $f(x) = 1 - x$ si x es irracional. Probar que:

a) $f(f(x)) = x$ para todo x de $[0, 1]$.
b) $f(x) + f(1 - x) = 1$ para todo x de $[0, 1]$.
c) f es continua sólo en el punto $x = \frac{1}{2}$.
d) f toma todos los valores comprendidos entre 0 y 1.
e) $f(x+y) - f(x) - f(y)$ es racional para todos los x e y de $[0, 1]$.

4.18 Sea f definida en $\mathbf{R}$ y supongamos que existe por lo menos un punto x_0 de $\mathbf{R}$ en el que f es continua. Supongamos también que, para cada x e y de $\mathbf{R}$, f satisface la ecuación

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Probar que existe una constante a tal que $f(x) = ax$ para todo x.

siempre que $x \neq y$.

a) Probar que f posee a lo sumo un punto fijo, y dar un ejemplo de una función f de este tipo sin puntos fijos.

b) Si S es compacto, probar que f admite un punto fijo exactamente. *Indicación.* Probar que $g(x) = d(x, f(x))$ alcanza un mínimo en S.

c) Dar un ejemplo en el que, siendo S compacto, f no sea una contracción.

4.72 Supongamos que f satisface la condición del ejercicio 4.71. Si $x \in S$, sea $p_0 = x$, $p_{n+1} = f(p_n)$, y $c_n = d(p_n, p_{n+1})$ para $n \geq 0$.

a) Probar que $\{c_n\}$ es una sucesión decreciente, y sea $c = \lim c_n$.

b) Supongamos que existe una subsucesión $\{p_{k(n)}\}$ convergente hacia un cierto punto q de S. Probar que

$$c = d(q, f(q)) = d(f(q), f[f(q)]).$$

Deducir que q es un punto fijo de f y que $p_n \to q$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

4.1 Boas, R. P., *A Primer of Real Functions.* Carus Monograph No. 13. Wiley, New York, 1960.

4.2 Gleason, A., *Fundamentals of Abstract Analysis.* Addison-Wesley, Reading, 1966.

4.3 Simmons, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis,* McGraw-Hill, New York, 1963.

4.4 Todd, J., *Survey of Numerical Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1962.

CAPÍTULO 5

Derivadas

5.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo trata de la derivada, concepto fundamental del Cálculo diferencial. Dos tipos distintos de problemas —el problema físico, que consiste en buscar la velocidad instantánea de una partícula móvil, y el problema geométrico, que consiste en buscar la recta tangente a una curva en un punto dado—, ambos conducen de forma muy natural a la noción de derivada. No nos interesaremos ni por las aplicaciones físicas ni por las aplicaciones geométricas; dedicaremos nuestra atención a las propiedades generales de las derivadas.

Este capítulo tratará, ante todo, de las derivadas de funciones de una variable real y, especialmente, de funciones reales definidas en intervalos de $\mathbf{R}$. Estudiará también brevemente las derivadas de funciones de valores vectoriales de una variable real, y las derivadas parciales, ya que estos temas no envuelven ideas nuevas. Mucho de lo que se expone será familiar al lector, pues se trata de Cálculo elemental. Un tratamiento más detallado de la teoría de la derivación para funciones de varias variables involucra cambios realmente importantes y por ello se desarrollará en el capítulo 12.

La última parte de este capítulo trata de las derivadas de funciones complejas de una variable compleja.

5.2 DEFINICIÓN DE DERIVADA

Si f está definida sobre un intervalo abierto (a, b), entonces para cada dos puntos distintos x y c de (a, b) podemos considerar el cociente de diferencias (*)

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Mantenemos c fijo y estudiamos el comportamiento de este cociente cuando $x \to c$.

* Este cociente se conoce con el nombre de cociente incremental. (N. de t.)

Definición 5.1. *Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a, b), y supongamos que $c \in (a, b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que el límite*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

exista. El límite, designado por $f'(c)$, se llama derivada de f en c.

Este método de calcular límites define una nueva función f', cuyo dominio está formado por aquellos puntos de (a, b) en los que f es diferenciable. La función f' se llama la *primera derivada* de f. Análogamente, la n-ésima derivada de f, designada por $f^{(n)}$, es la primera derivada de $f^{(n-1)}$, para $n = 2, 3, \ldots$ (según nuestra definición, sólo es posible considerar $f^{(n)}$ si $f^{(n-1)}$ está definida en un cierto intervalo abierto). Otras notaciones con las que el lector puede estar familiarizado son

$$f'(c) = Df(c) = \frac{df}{dx}(c) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} \qquad [\text{donde } y = f(x)],$$

o notaciones similares. La función f se escribe, a veces, $f^{(0)}$. El proceso que produce f' a partir de f se llama *diferenciación.*

5.3 DERIVADAS Y CONTINUIDAD

El teorema que se da a continuación permite reducir algunos de los teoremas de derivadas a teoremas de continuidad.

Teorema 5.2. *Si f está definida en un intervalo (a, b) y es diferenciable en un punto c de (a, b), entonces existe una función f^* (que depende de f y de c) continua en c y que satisface la ecuación*

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x), \tag{1}$$

para todo x de (a, b), con $f^*(c) = f'(c)$. Recíprocamente, si existe una función f^*, continua en c, que satisfaga (1), *entonces f es diferenciable en c y $f'(c) = f^*(c)$.*

Demostración. Si $f'(c)$ existe, sea f^* definida en (a, b) como sigue:

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \text{si } x \neq c, \quad f^*(c) = f'(c).$$

Entonces f^* es continua en c y (1) se verifica para todo x de (a, b).

Recíprocamente, si (1) se verifica para una cierta función f^* continua en c, entonces dividiendo por $x - c$ y haciendo $x \to c$ vemos que $f'(c)$ existe y es igual a $f^*(c)$.

Como consecuencia inmediata de (1) se obtiene:

Teorema 5.3. *Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.*

Demostración. En (1) hagamos $x \to c$.

NOTA. La ecuación (1) tiene una interpretación geométrica que ayuda a adquirir una intuición de su significado. Como que f^* es continua en c, $f^*(x)$ es aproximadamente igual a $f^*(c) = f'(c)$ si x es próximo a c. Reemplazando $f^*(x)$ por $f'(c)$ en (1) obtenemos la ecuación

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c),$$

que será aproximadamente correcta cuando $x - c$ sea pequeño. En otras palabras, si f es diferenciable en c, entonces f es aproximadamente una función lineal en las proximidades de c. (Ver Fig. 5.1.) El Cálculo diferencial explota, continuamente, esta propiedad geométrica de las funciones.

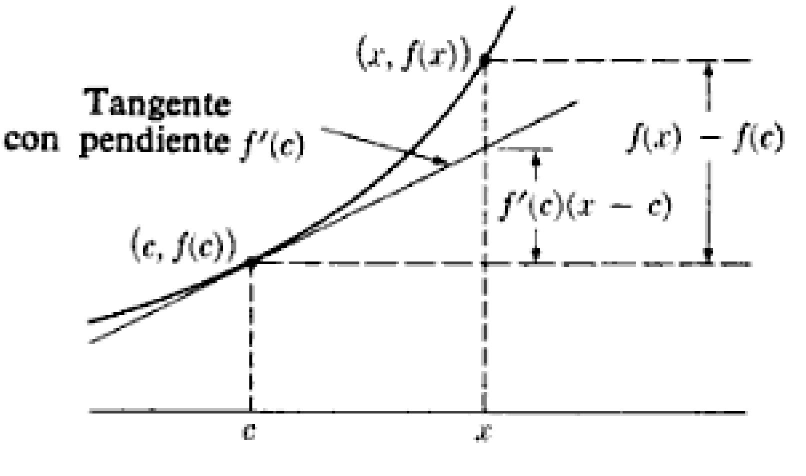


Figura 5.1

5.4 ÁLGEBRA DE DERIVADAS

El siguiente teorema describe las fórmulas usuales para diferenciar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos funciones.

Teorema 5.4. *Supongamos que f y g están definidas en (a, b) y son diferenciables en c. Entonces $f + g$, $f - g$ y $f \cdot g$ son también diferenciables en c. Esto es asimismo verdadero para f/g si $g(c) \neq 0$. Las derivadas en c están dadas por las fórmulas siguientes:*

a) $(f \pm g)'(c) = f'(c) \pm g'(c)$,

b) $(f \cdot g)'(c) = f(c)g'(c) + f'(c)g(c)$,

c) $(f/g)'(c) = \dfrac{g(c)f'(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$, *en el supuesto de que* $g(c) \neq 0$.

Demostración. Probaremos (b). Utilizando el teorema 5.2, escribiremos

$$f(x) = f(c) + (x - c)f^*(x), \qquad g(x) = g(c) + (x - c)g^*(x).$$

Entonces

$$f(x)g(x) - f(c)g(c) = (x - c)[f(c)g^*(x) + f^*(x)g(c)] + (x - c)^2 f^*(x)g^*(x).$$

Dividiendo por $x - c$ y haciendo que $x \to c$ obtendremos (b). Las demostraciones de las otras afirmaciones son análogas.

De la definición se sigue inmediatamente que si f es constante en (a, b), entonces $f' = 0$ en (a, b). También, si $f(x) = x$, entonces $f'(x) = 1$ para todo x. Aplicando repetidamente el teorema 5.4 obtenemos que si $f(x) = x^n$ (n entero positivo), entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo x. Aplicando, de nuevo, el teorema 5.4 vemos que todo polinomio admite derivada en todo **R** y que cada función racional admite derivada en los puntos en los que está definida.

5.5 LA REGLA DE LA CADENA

Un resultado más profundo lo constituye la llamada *regla de la cadena* para la diferenciación de funciones compuestas.

Teorema 5.5 (Regla de la cadena). *Sea f definida en un intervalo abierto S y sea g definida en $f(S)$, y consideremos la función compuesta $g \circ f$ definida en S por medio de la ecuación*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Supongamos que exista un punto c de S tal que $f(c)$ sea un punto interior de $f(S)$. Si f es diferenciable en c y g es diferenciable en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en c y se tiene que

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)]f'(c).$$

Demostración. Utilizando el teorema 5.2 podemos escribir

$$f(x) - f(c) = (x - c)f^*(x) \qquad \text{para todo } x \text{ de } S,$$

$B(c) \subseteq (a, b)$ en la que $f^*(x)$ tiene el mismo signo que $f^*(c)$, y esto significa que $f(x) - f(c)$ tiene el mismo signo que $x - c$.

Si $f'(c) = +\infty$, existe una bola unidimensional $B(c)$ en la que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 1 \qquad \text{cuando } x \neq c.$$

En esta bola el cociente es, de nuevo, positivo y la conclusión sigue como antes.

Un resultado análogo al del teorema 5.7 es válido, naturalmente, si $f'(c) < 0$ o si $f'(c) = -\infty$ en algún punto interior c de (a, b).

5.8 DERIVADAS CERO Y EXTREMOS LOCALES

Definición 5.8. *Sea f una función real definida en un subconjunto S de un espacio métrico M, y supongamos que $a \in S$. Entonces f posee un máximo local en a si existe una bola $B(a)$ tal que*

$$f(x) \leq f(a) \qquad \textit{para todo } x \textit{ de } B(a) \cap S.$$

Si $f(x) \geq f(a)$ para todo x de $B(a) \cap S$, entonces f posee un mínimo local en a.

NOTA. Un máximo local en a es el máximo absoluto de f en el subconjunto $B(a) \cap S$. Si f tiene un máximo absoluto en a, entonces a es un máximo local. Sin embargo, f puede poseer máximos locales en varios puntos de S sin que posea máximo absoluto en el conjunto S.

El teorema que sigue establece una relación entre las derivadas nulas y los extremos locales (máximos o mínimos) en puntos interiores.

Teorema 5.9. *Sea f definida en un intervalo abierto (a, b) y supongamos que f posee un máximo local o un mínimo local en un cierto punto interior c de (a, b). Si f posee derivada (finita o infinita) en c, entonces $f'(c)$ debe ser cero.*

Demostración. Si $f'(c)$ es positiva o $+\infty$, entonces f no puede tener un extremo local en c, en virtud del teorema 5.7. Análogamente, $f'(c)$ no puede ser negativa ni $-\infty$. Luego, dado que existe derivada en c, la única posibilidad que queda es $f'(c) = 0$.

El recíproco del teorema 5.9 es falso. En general, el saber que $f'(c) = 0$ no basta para deducir que f tiene un extremo en c. De hecho, es posible que

carezca de ellos, como puede verificarse por medio del ejemplo $f(x) = x^3$ y $c = 0$. En este caso, $f'(0) = 0$ pero f es creciente en todo entorno de 0.

Además, conviene insistir en el hecho de que f puede tener un extremo local en c sin que $f'(c)$ sea cero. Por ejemplo, $f(x) = |x|$ tiene un mínimo en $x = 0$ pero, naturalmente, no existe la derivada en 0. El teorema 5.9 presupone que f tiene derivada (finita o infinita) en c. El teorema presupone también que c es un punto interor de (a, b). En el ejemplo $f(x) = x$, donde $a \le x \le b$, f alcanza su máximo y su mínimo en los puntos extremos pero en cambio $f'(x)$ no es nunca cero en $[a, b]$.

5.9 TEOREMA DE ROLLE

Es geométricamente evidente que una curva suficientemente «regular» que corta al eje ox en los puntos extremos del intervalo $[a, b]$ debe poseer un «punto de viraje» en algún punto comprendido entre a y b. El enunciado preciso de este resultado se conoce con el nombre de teorema de Rolle.

Teorema 5.10 (Rolle). *Supongamos que f posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b), y supongamos también que f es continua en los puntos extremos a y b. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto interior c, por lo menos, en el que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a, b) y llegaremos a una contradicción. Como que f es continua en un conjunto compacto, alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de $[a, b]$. Ninguno de dichos valores extremos puede ser alcanzado en un punto interior (pues en ese caso f' se anularía); por lo tanto la función los alcanza en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, entonces $m = M$, y por lo tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el supuesto de que f' no es cero en ningún punto de (a, b). Luego $f'(c) = 0$ para algún c de (a, b).

5.10 TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS

Teorema 5.11 (Teorema del valor medio). *Sea f una función con derivada (finita o infinta) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b), y supongamos además que f es continua en los extremos a y b. Entonces existe un punto c de (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Geométricamente, este teorema establece que una curva suficientemente regular que una dos puntos A y B posee una tangente con la misma pendiente

que la cuerda AB. El teorema 5.11 lo deduciremos de un teorema más general que se refiere a dos funciones f y g que juegan un papel simétrico.

Teorema 5.12 (Teorema del valor medio generalizado). *Sean f y g dos funciones continuas que poseen derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b) y cada una es continua en los puntos extremos a y b y, además, no existe ningún punto x del interior del intervalo en el que $f'(x)$ y $g'(x)$ sean ambas infinitas. Entonces para algún punto c interior se tiene*

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)].$$

NOTA. Cuando $g(x) = x$, se obtiene el teorema 5.11.

Demostración. Sea $h(x) = f(x)\cdot[g(b) - g(a)] - g(x)\cdot[f(b) - f(a)]$. Entonces $h'(x)$ es finito si $f'(x)$ y $g'(x)$ son ambas finitas, y $h'(x)$ es infinito si una de las derivadas $f'(x)$ o $g'(x)$ es infinita. (La hipótesis excluye el caso de que *ambas* sean infinitas.) Además, h es continua en los exremos a y b, y $h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Por el teorema de Rolle existe un punto interior c en el que $h'(c) = 0$, lo que demuestra la proposición.

NOTA. El lector podrá interpretar el teorema 5.12 geométricamente, refiriéndolo a la curva del plano coordenado xy cuyas ecuaciones paramétricas son $x = g(t)$, $y = f(t)$, $a \leq t \leq b$.

Existe una extensión de este teorema que no requiere la hipótesis de continuidad en los extremos.

Teorema 5.13. *Sean f y g dos funciones, cada una de ellas con derivada (finita o infinita) en cada punto de (a, b). Supongamos también que en los extremos a y b existen los límites $f(a+)$, $g(a+)$, $f(b-)$, $g(b-)$ y son finitos. Supongamos además que no existe ningún punto x de (a, b) en el que las derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$ sean ambas infinitas. Entonces para algún punto interior c tenemos*

$$f'(c)[g(b-) - g(a+)] = g'(c)[f(b-) - f(a+)].$$

Demostración. Definamos dos nuevas funciones F y G en $[a, b]$ como sigue:

$$F(x) = f(x) \quad \text{y} \quad G(x) = g(x) \quad \text{si } x \in (a, b);$$

$$F(a) = f(a+), \quad G(a) = g(a+), \quad F(b) = f(b-), \quad G(b) = g(b-).$$

Entonces F y G son continuas en $[a, b]$ y podemos aplicar el teorema 5.12 a F y G a fin de obtener la conclusión deseada.

El resultado que sigue es una consecuencia inmediata del teorema del valor medio.

Teorema 5.14. *Suponemos que f posee una derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos del intervalo (a, b) y que f es continua en los extremos a y b.*

a) *Si f' toma sólo valores positivos (finitos o infinitos) en (a, b), entonces f es estrictamente creciente en $[a, b]$.*
b) *Si f' toma sólo valores negativos (finitos o infinitos) en (a, b), entonces f es estrictamente decreciente en $[a, b]$.*
c) *Si f' es cero en todo (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$.*

Demostración. Elijamos $x < y$ y apliquemos el teorema del valor medio al subintervalo $[x, y]$ de $[a, b]$. Obtendremos

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) \qquad \text{donde } c \in (x, y).$$

Todas las afirmaciones del teorema siguiente se deducen inmediatamente de esta ecuación.

Aplicando el teorema 5.14(c) a la diferencia $f - g$ se obtiene:

Corolario 5.15. *Si f y g son continuas en $[a, b]$ y tienen derivadas finitas iguales en (a, b), entonces $f - g$ es constante en $[a, b]$.*

5.11 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA LAS DERIVADAS

En el teorema 4.33 se ha demostrado que una función f continua en un intervalo compacto $[a, b]$ alcanza todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo en el intervalo. En particular, f alcanza cada uno de los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$. Un resultado análogo es válido para las funciones que se obtienen como derivadas de otras.

Teorema 5.16 (teorema del valor intermedio para derivadas). *Supongamos que f está definida en un intervalo compacto $[a, b]$ y que posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos interiores. Supongamos, además, que f posee derivadas laterales finitas $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en los puntos extre-*

mos, con $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. Entonces, si c es un número real comprendido entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, existe por lo menos un punto interior x tal que $f'(x) = c$.

Demostración. Definamos una nueva función g como sigue:

$$g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{si } x \neq a, \; g(a) = f'_+(a).$$

Entonces g es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. Por el teorema del valor intermedio de las funciones continuas, g alcanza cada uno de los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior de (a, b). Por el teorema del valor medio, tenemos que $g(x) = f'(c)$ para algún c de (a, x), en donde $x \in (a, b)$. Por lo tanto, f' toma todos los valores entre $f'_+(a)$ y $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ en el interior (a, b). Un argumento análogo aplicado a la función h, definida por

$$h(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \qquad \text{si } x \neq b, \quad h(b) = f'_-(b),$$

prueba que f' alcanza todos los valores comprendidos entre $[f(b) - f(a)]/(b - a)$ y $f'_-(b)$ en el interior (a, b). Combinando estos resultados, vemos que f' alcanza cada uno de los valores comprendidos entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en el interior (a, b), lo cual termina la demostración.

NOTA. El teorema 5.16 es asimismo válido si una o ambas derivadas laterales $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ es infinita. La demostración en este caso se obtiene considerando la función auxiliar g definida por medio de la ecuación $g(x) = f(x) - cx$, si $x \in [a, b]$. Los detalles se dejan al lector.

El teorema del valor intermedio demuestra que una derivada no puede cambiar de signo en un intervalo si no toma el valor cero. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema, que es más fuerte que el 5.14(a) y (b).

Teorema 5.17. *Sea f con derivada (finita o infinita) en (a, b) y continua en los extremos a y b. Si $f'(x) \neq 0$ para todo x de (a, b), entonces f es estrictamente monótona en a, b.*

El teorema del valor intermedio prueba también que las derivadas monótonas son necesariamente continuas.

Teorema 5.18. *Supongamos que f' existe y es monótona en un intervalo abierto (a, b). Entonces f' es continua en (a, b).*

$$\mathbf{f}'(c) = \big(f_1'(c), \ldots, f_n'(c)\big).$$

En otras palabras, la derivada $\mathbf{f}'(c)$ se obtiene diferenciando cada una de las componentes de $\mathbf{f}$ en c. A la vista de esta definición no es sorprendente que nos preguntemos cuáles de los teoremas de diferenciación son válidos para funciones vectoriales. Por ejemplo, si $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son funciones vectoriales diferenciables en c y si λ es una función real diferenciable en c, entonces la suma $\mathbf{f} + \mathbf{g}$, el producto $\lambda\mathbf{f}$, y el producto escalar $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}$ son diferenciables en c y se tiene

$$\begin{aligned}(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(c) &= \mathbf{f}'(c) + \mathbf{g}'(c),\\ (\lambda\mathbf{f})'(c) &= \lambda'(c)\mathbf{f}(c) + \lambda(c)\mathbf{f}'(c),\\ (\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})'(c) &= \mathbf{f}'(c)\cdot\mathbf{g}(c) + \mathbf{f}(c)\cdot\mathbf{g}'(c).\end{aligned}$$

Las demostraciones se obtienen fácilmente si se consideran las componentes. Existe también una regla de la cadena para diferenciar funciones compuestas que se prueba de la misma manera. Si $\mathbf{f}$ es vectorial y u es real, entonces la función compuesta $\mathbf{g}$, dada por $\mathbf{g}(x) = \mathbf{f}[u(x)]$, es vectorial. La regla de la cadena establece que

$$\mathbf{g}'(c) = \mathbf{f}'[u(c)]u'(c),$$

si el dominio de $\mathbf{f}$ contiene un entorno de $u(c)$ y si $u'(c)$ y $\mathbf{f}'[u(c)]$ existen.

El teorema del valor medio establecido en el teorema 5.11 no se verifica en el caso de funciones vectoriales. Por ejemplo, si $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ para todo t real, entonces

$$\mathbf{f}(2\pi) - \mathbf{f}(0) = \mathbf{0},$$

pero $\mathbf{f}'(t)$ no es nunca cero. De hecho, $\|\mathbf{f}'(t)\| = 1$ para todo t. Una versión modificada del teorema del valor medio para funciones vectoriales será desarrollada en el capítulo 12 (teorema 12.8).

5.14 DERIVADAS PARCIALES

Sea S un conjunto abierto del espacio euclídeo $\mathbf{R}^n$, y sea $f\colon S \to \mathbf{R}$ una función real definida en S. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ son dos puntos de S con las coordenadas correspondientes iguales excepto en el k-ésimo lugar, esto es si $x_i = c_i$ para $i \neq k$ y si $x_k \neq c_k$, entonces podemos considerar el límite

$$\lim_{x_k \to c_k} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{c})}{x_k - c_k}.$$

Cuando este límite existe, se le llama *derivada parcial* de f con respecto de la k-ésima coordenada y se designa por medio de

$$D_k f(\mathbf{c}), \qquad f_k(\mathbf{c}), \qquad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{c}),$$

o por alguna otra expresión análoga. Nosotros adoptaremos la notación $D_k f(\mathbf{c})$.

Este proceso produce n nuevas funciones $D_1 f$, $D_2 f$, ..., $D_n f$ definidas en los puntos de S en los que los correspondientes límites existen.

La diferenciación parcial no es, realmente, un nuevo concepto. Podemos considerar a $f(x_1, ..., x_n)$ como una función de una sola variable cada vez, dejando las demás fijas. Es decir, si introducimos una función g definida por

$$g(x_k) = f(c_1, \ldots, c_{k-1}, x_k, c_{k+1}, \ldots, c_n),$$

entonces la derivada parcial $D_k f(\mathbf{c})$ es precisamente la derivada ordinaria $g'(c_k)$. Esto se enuncia usualmente diciendo que para diferenciar f con respecto a la k-ésima variable, se suponen constantes las otras variables.

Siempre que tengamos que generalizar un concepto de $\mathbf{R}^1$ a $\mathbf{R}^n$ procuraremos conservar las propiedades más importantes que, en el caso unidimensional, la existencia de la derivada en c implica la continuidad en c. Por lo tanto, lo óptimo sería disponer un concepto de derivada para funciones de varias variables que implicara la continuidad. Para las derivadas parciales *no* ocurre esto. Una función de n variables puede poseer derivadas parciales en un punto con respecto de cada una de las variables y no ser continua en dicho punto. Ilustraremos esta afirmación por medio del ejemplo de una función con dos variables:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ 1, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las derivadas parciales $D_1 f(0, 0)$ y $D_2 f(0, 0)$ existen ambas. En efecto:

$$D_1 f(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1,$$

y, análogamente, $D_2 f(0, 0) = 1$. Por otro lado, es claro que esta función no es continua en $(0, 0)$.

La existencia de las derivadas parciales con respecto de cada variable separadamente implica la continuidad con respecto de cada variable separadamente; pero como hemos visto, ello no implica necesariamente la continuidad respecto de todas las variables simultáneamente. La dificultad que presentan

las derivadas parciales proviene de su misma definición: en ella estamos obligados a considerar sólo una variable cada vez. Las derivadas parciales nos proporcionan una medida de la variación de una función en la dirección de cada uno de los ejes. Existe un concepto más general de derivada que no restringe nuestras consideraciones a las direcciones particulares de los ejes coordenados. Este concepto será desarrollado en el capítulo 12.

El propósito de esta sección es únicamente el de introducir la notación de las derivadas parciales, ya que las utilizaremos ocasionalmente antes de alcanzar el capítulo 12.

Si f tiene derivadas parciales $D_1 f, \ldots, D_n f$ en un conjunto abierto S, entonces podemos también considerar *sus* derivadas parciales. Éstas se llamarán derivadas parciales de *segundo orden*. Escribiremos $D_{r,k} f$ para designar la derivada parcial de $D_k f$ con respecto de la r-ésima variable. Entonces,

$$D_{r,k} f = D_r(D_k f).$$

Las derivadas parciales de orden superior se definen análogamente. Otras notaciones son

$$D_{r,k} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_r\, \partial x_k}, \qquad D_{p,q,r} f = \frac{\partial^3 f}{\partial x_p\, \partial x_q\, \partial x_r}.$$

5.15 DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

En esta sección discutiremos brevemente las derivadas de las funciones complejas definidas en subconjuntos del plano complejo. Tales funciones son, naturalmente, funciones vectoriales cuyo dominio y recorrido son subconjuntos de $\mathbf{R}^2$. Todas las consideraciones del capítulo 4 concernientes a los límites y a la continuidad de las funciones vectoriales se aplican, en particular, a las funciones de una variable compleja. Existe, sin embargo, una diferencia esencial entre el conjunto $\mathbf{C}$ de los números complejos y el conjunto $\mathbf{R}^n$ de los vectores n dimensionales (cuando $n > 2$) que juega un importante papel en este momento. En el sistema de los números complejos disponemos de las cuatro operaciones algebraicas de sumar, restar, multiplicar y dividir, y estas operaciones verifican muchas de las propiedades «usuales» del Álgebra que son válidas en el sistema de los números reales. En particular verifican los cinco primeros axiomas de los números reales enumerados en el capítulo 1. (Los axiomas 6 al 10 involucran la relación de orden $<$, que no existe entre números complejos.) Todo sistema algebraico que verifica los axiomas 1 al 5 se llama *cuerpo*. (Para una discusión más amplia de los cuerpos, véase la referencia 1.4.)

La multiplicación y la división no pueden ser introducidas en $\mathbf{R}^n$ (para $n > 2$) de forma que $\mathbf{R}^n$ sea un cuerpo * que contenga a $\mathbf{C}$. Como la división es posible en $\mathbf{C}$, es posible asimismo formar el cociente fundamental de diferencias $[f(z) - f(c)]/(z - c)$ que fue utilizado para definir la derivada en $\mathbf{R}$, y entonces se presenta de forma clara cómo hay que definir la derivada en $\mathbf{C}$.

Definición 5.21. *Sea f una función compleja definida en un conjunto abierto S de $\mathbf{C}$, y sea $c \in S$. Entonces f es diferenciable en c si el límite*

$$\lim_{z \to c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c} = f'(c)$$

existe.

Por medio de este proceso de calcular límites se obtiene una nueva función compleja f' definida en aquellos puntos z de S donde $f'(z)$ existe. Las derivadas de orden superior f'', f''', ... se definen, como es natural, de forma análoga.

Las siguientes proposiciones son válidas para funciones complejas definidas en un conjunto abierto S; sus demostraciones son exactamente las mismas que las utilizadas en el caso real:

a) *f es diferenciable en c si, y sólo si, existe una función f^*, continua en c, tal que*

$$f(z) - f(c) = (z - c)f^*(z),$$

para todo z de S, con $f^*(c) = f'(c)$.

NOTA. Si hacemos $g(z) = f^*(z) - f'(c)$, la ecuación de (a) podemos ponerla en la forma

$$f(z) = f(c) + f'(c)(z - c) + g(z)(z - c),$$

donde $g(z) \to 0$ cuando $z \to c$. Esta expresión se llama la *fórmula de Taylor de primer orden* para f.

* Por ejemplo, si fuese posible definir una multiplicación en $\mathbf{R}^3$ que dotara a $\mathbf{R}^3$ de estructura de cuerpo, conteniendo a $\mathbf{C}$, podríamos razonar como sigue: Para cada $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$ los vectores 1, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$ serían linealmente dependientes (ver Referencia 5.1, p. 558). Entonces para cada $\mathbf{x}$ de $\mathbf{R}^3$, se verificaría una relación del tipo $a_0 + a_1\mathbf{x} + a_2\mathbf{x}^2 + a_3\mathbf{x}^3 = 0$, donde a_0, a_1, a_2, a_3 son números reales. Pero cada polinomio de grado tres con coeficientes reales es un producto de un polinomio lineal por un polinomio cuadrático con coeficientes reales. Las únicas raíces de tales polinomios son o bien números reales o bien números complejos.

b) *Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.*
c) *Si dos funciones f y g tienen derivadas en c, entonces su suma, su diferencia, su producto y su cociente tienen también derivadas en c y se obtienen por medio de las fórmulas usuales (como en el teorema 5.4). En el caso de f/g, debemos suponer que $g(c) \neq 0$.*
d) *La regla de la cadena es válida; es decir, tenemos*

$$(g \circ f)'(c) = g'[f(c)]f'(c),$$

si el dominio de g contiene un entorno de $f(c)$ y si $f'(c)$ y $g'[f(c)]$ existen.

Si $f(z) = z$, se obtiene $f'(z) = 1$ para todo z de **C**. Por (c) reiterado, se tiene que $f'(z) = nz^{n-1}$ cuando $f(z) = z^n$ (n es un entero positivo). Esto también se verifica cuando n es un entero negativo, siempre que $z \neq 0$. Por lo tanto, es posible calcular las derivadas de los polinomios complejos y de las funciones racionales complejas utilizando las mismas técnicas que las empleadas en el Cálculo elemental.

5.16 ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

Si f es una función compleja de una variable compleja, podemos escribir cada valor de la función en la forma

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

donde u y v son funciones reales de una variable compleja. Podemos, además, considerar u y v como funciones reales de dos variables reales y escribir entonces

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad \text{si } z = x + iy.$$

En ambos casos, escribiremos $f = u + iv$ y nos referiremos a u y a v designándolas parte *real* y parte *imaginaria* de f. Así, en el caso de la función exponencial compleja f, definida por

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$

las partes real e imaginaria vienen dadas por

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Análogamente, cuando $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$, obtenemos

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = 2xy.$$

condición no es, sin embargo, suficiente, como podemos ver considerando el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sean u y v definidas como sigue:

$$u(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad u(0, 0) = 0,$$

$$v(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad v(0, 0) = 0.$$

Es fácil comprobar que $D_1u(0, 0) = D_1v(0, 0) = 1$ y que $D_2u(0, 0) = -D_2v(0, 0) = -1$, por lo tanto las ecuaciones de Cauchy-Riemann se verifican en $(0, 0)$. A pesar de todo, la función $f = u + iv$ no puede tener derivada en $z = 0$. En efecto, para $x = 0$, el cociente diferencial se convierte en

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{-y + iy}{iy} = 1 + i,$$

mientras que para $x = y$, es

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{xi}{x + ix} = \frac{1 + i}{2},$$

y por lo tanto $f'(0)$ no existe.

En el capítulo 12 demostraremos que las ecuaciones de Cauchy-Riemann *son* suficientes para establecer la existencia de la derivada de $f = u + iv$ en c si las derivadas parciales de u y v son continuas en un entorno de c. Para ilustrar cómo hay que utilizar este resultado en la práctica, obtendremos la derivada de la función exponencial. Sea $f(z) = e^z = u + iv$. Entonces

$$u(x, y) = e^x \cos y, \qquad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y,$$

y por lo tanto

$$D_1u(x, y) = e^x \cos y = D_2v(x, y), \qquad D_2u(x, y) = -e^x \operatorname{sen} y = -D_1v(x, y).$$

Como estas derivadas parciales son continuas en todo $\mathbf{R}^2$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la derivada $f'(z)$ existe para todo z. Para calcularla usaremos el teorema 5.22 y obtendremos

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y = f(z).$$

Entonces, la función exponencial es su misma derivada (como en el caso real).

EJERCICIOS

Funciones reales

En los ejercicios que siguen se supone, siempre que sea necesario, que se conocen las fórmulas para derivar las funciones elementales trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

5.1 Una función f satisface una condición de Lipschitz de orden α en c si existe un número positivo M (que puede depender de c) y una bola unidimensional $B(c)$ tales que

$$|f(x) - f(c)| < M|x - c|^{\alpha}$$

si $x \in B(c)$, $x \neq c$.

a) Probar que una función que satisface una condición de Lipschitz de orden α es continua en c si $\alpha > 0$, y derivable en c si $\alpha > 1$.

b) Dar un ejemplo de una función que satisfaga la condición de Lipschitz de orden 1 en c para la que $f'(c)$ no exista.

5.2 En cada uno de los siguientes casos, determinar los intervalos en los que la función f es creciente o decreciente y determinar los máximos y mínimos (si existen) en el conjunto en el que f está definida.

a) $f(x) = x^3 + ax + b$, $\quad x \in \mathbf{R}$.

b) $f(x) = \log(x^2 - 9)$, $\quad |x| > 3$.

c) $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^4$, $\quad 0 \leq x \leq 1$.

d) $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ if $x \neq 0, f(0) = 1$, $\quad 0 \leq x \leq \pi/2$.

5.3 Buscar un polinomio f del menor grado posible tal que

$$f(x_1) = a_1, \qquad f(x_2) = a_2, \qquad f'(x_1) = b_1, \qquad f'(x_2) = b_2,$$

donde $x_1 \neq x_2$ y a_1, a_2, b_1, b_2 son números reales dados.

5.4 Se define f como sigue: $f(x) = e^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Probar que

a) f es continua para todo x.

b) $f^{(n)}$ es continua para todo x, y que $f^{(n)}(0) = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

5.5 Definimos f, g y h como sigue: $f(0) = g(0) = h(0)$ y, si $x \neq 0$, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$, $g(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$, $h(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$. Probar que

a) $f'(x) = -1/x^2 \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $\quad f'(0)$ no existe.

b) $g'(x) = \operatorname{sen}(1/x) - 1/x \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $\quad g'(0)$ no existe.

c) $h'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$, si $x \neq 0$; $\quad h'(0) = 0$; $\lim_{x \to 0} h'(x)$ no existe.

5.6 Obtener la fórmula de Leibnitz para la derivada n-ésima del producto h de dos funciones f y g:

$$h^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x), \qquad \text{donde } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

5.7 Sean f y g dos funciones definidas en todo **R** y con derivadas finitas terceras $f'''(x)$ y $g'''(x)$ para todo x de **R**. Si $f(x)\,g(x) = 1$ para todo x, probar que las relaciones de (a), (b), (c) y (d) se verifican en todos los puntos en los que el denominador no es cero:

a) $f'(x)/f(x) + g'(x)/g(x) = 0.$

b) $f''(x)/f'(x) - 2f'(x)/f(x) - g''(x)/g'(x) = 0.$

c) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - 3\dfrac{f'(x)g''(x)}{f(x)g'(x)} - 3\dfrac{f''(x)}{f(x)} - \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} = 0.$

d) $\dfrac{f'''(x)}{f'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \dfrac{g'''(x)}{g'(x)} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{g''(x)}{g'(x)}\right)^2.$

NOTA. La expresión que aparece en el primer miembro de (d) se llama *derivada de Schwarz* de f en x.

e) Probar que f y g tienen la misma derivada de Schwarz si

$$g(x) = [af(x) + b]/[cf(x) + d], \text{donde } ad - bc \neq 0.$$

Indicación. Si $c \neq 0$, escribir $(af + b)/(cf + d) = (a/c) + (bc - ad)/[c(cf + d)]$ y aplicar la parte (d).

5.8 Sean f_1, f_2, g_1, g_2 cuatro funciones con derivadas en (a, b). Definamos F por medio del determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}, \qquad \text{si } x \in (a, b).$$

a) Probar que $F'(x)$ existe para cada x de (a, b) y que

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}.$$

b) Establecer y probar un resultado más general para determinantes de orden n.

5.9 Dadas n funciones $f_1, \ldots, f_n$ derivables hasta el orden n en (a, b), definimos una función W, llamada el *Wronskiano* de $f_1, \ldots, f_n$ como sigue: Para cada x de (a, b), $W(x)$ es el valor del determinante de orden n que en la k-ésima fila, m-ésima columna, tiene al elemento $f_m^{(k-1)}(x)$, donde $k = 1, 2, \ldots, n$ y $m = 1, 2, \ldots, n$. [La expresión $f_m^{(0)}(x)$ designa a $f_m(x)$.]

a) Probar que $W'(x)$ se obtiene reemplazando la última fila del determinante que define $W(x)$ por las derivadas n-ésimas $f_1^{(n)}(x), \ldots, f_n^{(n)}(x)$.

b) Supongamos que existen n constantes $c_1, \ldots, c_n$, no nulas, tales que $c_1f_1(x) + \ldots + c_nf_n(x) = 0$ para todo x de (a, b). Probar que $W(x) = 0$ para cada x en (a, b).

NOTA. Un conjunto de funciones que satisface una relación de este tipo se llama *conjunto linealmente dependiente* sobre (a, b).

c) La anulación del Wronskiano en todo el intervalo (a, b) es necesaria, pero no es suficiente para que $f_1, \ldots, f_n$ sean linealmente dependientes. Probar

que en el caso de dos funciones, si el Wronskiano se anula en (a, b) y si una de las funciones no se anula en (a, b), entonces constituyen un conjunto linealmente dependiente en (a, b).

El teorema del valor medio

5.10 Dada una función f definida y derivable con derivada finita en (a, b) y tal que $\lim_{x\to b-} f(x) = +\infty$, probar que $\lim_{x\to b-} f'(x)$ o no existe o es infinito.

5.11 Probar que la fórmula del valor medio puede escribirse en la forma:

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x + \theta h),$$

donde $0 < \theta < 1$. Determinar θ en función de x y de h cuando

a) $f(x) = x^2$, b) $f(x) = x^3$,

c) $f(x) = e^x$, d) $f(x) = \log x$, $x > 0$.

Fijar $x \neq 0$ y hallar $\lim_{h\to 0} \theta$ en cada caso.

5.12 En el teorema 5.20 hacemos $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1$ y $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x$. Probar que $f'(x)/g'(x)$ nunca es igual al cociente $[f(1) - f(0)]/[g(1) - g(0)]$ si $0 < x \leq 1$. ¿Cómo conciliar esto con la igualdad

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}, \qquad a < x_1 < b,$$

que se obtiene del teorema 5.20 cuando $n = 1$?

5.13 En cada uno de los casos especiales del teorema 5.20, tomar $n = 1$, $c = a$, $x = b$, y demostrar que $x_1 = (a + b)/2$.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = \cos x$; b) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

¿Es posible encontrar una clase general de pares de funciones f y g para los que x_1 sea siempre $(a + b)/2$ y tales que los ejemplos (a) y (b) pertenezcan a dicha clase?

5.14 Dada una función f definida y con derivada finita f' en el intervalo semiabierto $0 < x \leq 1$ y tal que $|f'(x)| < 1$, definimos $a_n = f(1/n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Demostrar que el $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe. *Indicación.* Utilizar la condición de Cauchy.

5.15 Supongamos que f posee derivada finita en cada uno de los puntos del intervalo abierto (a, b). Supongamos además que $\lim_{x\to c} f'(x)$ existe y es finito para uno de los puntos interiores c. Demostrar que el valor de este límite deberá ser $f'(c)$.

5.16 Sea f continua en (a, b) con derivada finita f' en todo (a, b), excepto quizás en c. Si $\lim_{x\to c} f'(x)$ existe y vale A, entonces $f'(c)$ existe también y vale A.

5.17 Sea f continua en $[0, 1]$, $f(0) = 0$, $f'(x)$ finito para cada x de $(0, 1)$. Probar que si f' es creciente en $(0, 1)$, entonces también lo es la función g definida por medio de la ecuación $g(x) = f(x)/x$.

5.18 Supongamos que f posee derivada finita en (a, b) y es continua en $[a, b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para cada real λ existe un c de (a, b) tal que $f'(c) = \lambda f(c)$. *Indicación.* Aplicar el teorema de Rolle a $g(x) f(x)$ para una g conveniente que dependa de λ.

5.19 Supongamos que f es continua en $[a, b]$ y que posee una derivada segunda f'' finita en el intervalo abierto (a, b). Supongamos que la cuerda que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ corta a la gráfica de la función f en un tercer punto P distinto de A y de B. Probar que $f''(c) = 0$ para un c de (a, b).
5.20 Si f posee derivada tercera f''' finita en $[a, b]$ y si

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0,$$

probar que $f'''(c) = 0$ para un c de (a, b).
5.21 Sea f una función no negativa y que admita tercera derivada finita f''' en el intervalo abierto $(0, 1)$. Si $f(x) = 0$ para dos puntos, por lo menos, de x en $(0, 1)$, entonces $f'''(c) = 0$ para un c de $(0, 1)$.
5.22 Supongamos que f admite una derivada finita en un cierto intervalo $(a, +\infty)$.

a) Si $f(x) \to 1$ y $f'(x) \to c$ cuando $x \to +\infty$, probar que $c = 0$.
b) Si $f'(x) \to 1$ cuando $x \to +\infty$, probar que $f(x)/x \to 1$ cuando $x \to +\infty$.
c) Si $f'(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$, probar que $f(x)/x \to 0$cuando $x \to +\infty$.

5.23 Sea h un número positivo fijo. Probar que no existe ninguna función f que satisfaga las tres condiciones siguientes: $f'(x)$ existe para $x \geq 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) \geq h$ para $x > 0$.
5.24 Si $h > 0$ y $f'(x)$ existe (y es finita) para cada x de $(a - h, a + h)$, y si f es continua en $[a - h, a + h]$, probar que se tiene:

a) $$\frac{f(a + h) - f(a - h)}{h} = f'(a + \theta h) + f'(a - \theta h), \qquad 0 < \theta < 1;$$

b) $$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h} = f'(a + \lambda h) - f'(a - \lambda h), \qquad 0 < \lambda < 1.$$

c) Si $f''(a)$ existe, probar

$$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2}.$$

d) Dar un ejemplo en el que exista el límite del cociente que aparece en (c) pero $f''(a)$ no exista.

5.25 Sea f una función con derivada finita en (a, b) y supongamos que $c \in (a, b)$. Considerar la siguiente condición: Para cada $\varepsilon > 0$ existe una bola unidimensional $B(c; \delta)$, cuyo radio δ depende sólo de ε y no de c, tal que si $x \in B(c; \delta)$ y $x \neq c$, entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right| < \varepsilon.$$

Probar que f' es continua en (a, b) si esta condición se verifica en todo (a, b).
5.26 Sea f con derivada finita en (a, b) y continua en $[a, b]$, con $a \leq f(x) \leq b$ para todo x de $[a, b]$ y $|f'(x)| \leq \alpha < 1$ para todo x de (a, b). Probar que f posee un único punto fijo en $[a, b]$.

REFERENCIAS SUGERIDAS PARA POSTERIORES ESTUDIOS

5.1 Apostol, T. M., *Calculus*, Vol. 1. 2.ª ed. Ed. Reverté, S. A., Barcelona, Bogotá, Buenos Aires, Caracas, México.
5.2 Chaundy, T. W., *The Differential Calculus*. Clarendon Press, Oxford, 1935.

CAPÍTULO 6

Funciones de variación acotada y curvas rectificables

6.1 INTRODUCCIÓN

Algunas de las propiedades básicas de las funciones monótonas fueron descritas en el capítulo 4. En este breve capítulo se estudian las funciones de variación acotada, una clase de funciones íntimamente relacionada con las funciones monótonas. Veremos que estas funciones están en estrecha conexión con las curvas que poseen longitud finita (curvas rectificables). Juegan también un papel en la teoría de la integración de Riemann-Stieltjes que desarrollaremos en el próximo capítulo.

6.2 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MONÓTONAS

Teorema 6.1. *Sea f una función creciente definida en $[a, b]$ y sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n + 1$ puntos tales que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Tenemos entonces la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n-1} [f(x_k+) - f(x_k-)] \le f(b) - f(a).$$

Demostración. Supongamos que $y_k \in (x_k, x_{k+1})$. Para $1 \le k \le n-1$ tenemos que $f(x_k+) \le f(y_k)$ y $f(y_{k-1}) \le f(x_k-)$, luego $f(x_k+) - f(x_k-) \le f(y_k) - f(y_{k-1})$. Si sumamos estas desigualdades, la suma de la derecha nos da $f(y_{n-1}) - f(y_0)$. Puesto que $f(y_{n-1}) - f(y_0) \le f(b) - f(a)$, esto completa la demostración.

La diferencia $f(x_k+) - f(x_k-)$ es, además, el salto de f en x_k. El teorema anterior nos dice que, para cada colección finita de puntos x_k de (a, b), la suma de los saltos en estos puntos está siempre acotada por $f(b) - f(a)$. Este resultado nos servirá para demostrar el teorema siguiente.

Teorema 6.2. *Si f es monótona en $[a, b]$, entonces el conjunto de discontinuidades de f es numerable.*

Demostración. Supongamos que f es creciente y sea S_m el conjunto de puntos de (a, b) en los que el salto de f es superior a $1/m$, $m > 0$. Si $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$ están en S_m, el teorema 6.1 nos asegura que

$$\frac{n-1}{m} \leq f(b) - f(a).$$

Esto significa que S_m debe ser un conjunto finito. Pero el conjunto de discontinuidades de f en (a, b) es un subconjunto de la reunión $\bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ y por lo tanto numerable. (Si f es decreciente, el argumento se aplica a $-f$.)

6.3 FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA

Definición 6.3. *Si $[a, b]$ es un intervalo compacto, un conjunto de puntos*

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

que satisfaga las desigualdades

$$a = x_0 < x_1 \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

se llama partición de $[a, b]$. El intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se llama k-ésimo subintervalo de P y se escribe $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, con lo que $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$. La colección de todas las particiones posibles de $[a, b]$ se designará por medio de $\mathcal{P}[a, b]$.

Definición 6.4. *Sea f definida en $[a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, escribiremos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Si existe un número positivo M tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$$

para toda partición de $[a, b]$, entonces diremos que f es de variación acotada en $[a, b]$.

Los dos teoremas que siguen proporcionan ejemplos de funciones de variación acotada.

Teorema 6.5. *Si f es monótona en $[a, b]$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Sea f creciente. Entonces para cada partición de $[a, b]$ tenemos $\Delta f_k \geq 0$ y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} \Delta f_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = f(b) - f(a).$$

Teorema 6.6. *Si f es continua en $[a, b]$ y si f' existe y está acotada en el interior, es decir que $|f'(x)| \leq A$ para todo x de (a, b), entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración. Aplicando el teorema del valor medio, tenemos

$$\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1}), \text{ en donde } t_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Esto implica

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| = \sum_{k=1}^{n} |f'(t_k)| \, \Delta x_k \leq A \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = A(b - a).$$

Teorema 6.7. *Si f es de variación acotada en $[a, b]$, es decir que $\sum |\Delta f_k| \leq M$ para toda partición de $[a, b]$, entonces f está acotada en $[a, b]$. De hecho,*

$$|f(x)| \leq |f(a)| + M \quad \textit{para todo } x \textit{ de } [a, b].$$

Demostración. Supongamos que $x \in (a, b)$. Utilizando la partición especial $P = \{a, x, b\}$, obtenemos

$$|f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq M.$$

Esto implica que $|f(x) - f(a)| \leq M$, $|f(x)| \leq |f(a)| + M$. Idéntica desigualdad se verifica si $x = a$ o si $x = b$.

Ejemplos

1. Es fácil construir funciones continuas que no sean de variación acotada. Por ejemplo, sea $f(x) = x \cos \{\pi/(2x)\}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Entonces f es continua en $[0, 1]$, pero si consideramos la partición en $2n$ subintervalos

$$P = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\},$$

es fácil comprobar, calculando, que

$$\sum_{k=1}^{2n} |\Delta f_k| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Esta suma no está acotada para todo n, ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1/n)$ diverge. En este ejemplo la derivada f' existe en $(0, 1)$ pero f' no está acotada en $(0, 1)$. Sin embargo, f' está acotada en todo intervalo compacto que no contenga el origen y, por lo tanto, f es de variación acotada en tales intervalos.

2. Un ejemplo análogo al primero lo proporciona la función $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Dicha función f es de variación acotada en $[0, 1]$, ya que f' está acotada en $[0, 1]$. De hecho, $f'(0) = 0$ y, para $x \neq 0$, $f'(x) = \operatorname{sen}(1/x) + 2x \cos(1/x)$, luego $|f'(x)| \leq 3$ para todo x de $[0, 1]$.
3. La acotación de f' no es condición necesaria para que f sea variación acotada. Por ejemplo, considérese la función $f(x) = x^{1/3}$. Esta función es monótona (y por lo tanto de variación acotada) sobre todo intervalo finito. Sin embargo, $f'(x) \to +\infty$ cuando $x \to 0$.

6.4 VARIACIÓN TOTAL

Definición 6.8. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$ y sea $\sum(P)$ la suma $\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|$ correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$. El número*

$$V_f(a, b) = \sup \{\textstyle\sum(P) : P \in \mathscr{P}[a, b]\},$$

se llama variación total de f en el intervalo $[a, b]$.

NOTA. Si no hay peligro de confusión, escribiremos V_f en vez de $V_f(a, b)$.

Dado que f es de variación acotada en $[a, b]$, el número V_f es finito. Además $V_f \geq 0$, ya que cada suma $\sum(P) \geq 0$. Y además $V_f(a, b) = 0$ si, y sólo si, f es constante en $[a, b]$.

Teorema 6.9. *Supongamos que f y g son dos funciones de variación acotada en $[a, b]$. Entonces también lo es su suma, su diferencia y su producto. Además, se tiene*

$$V_{f \pm g} \leq V_f + V_g \qquad \text{y} \qquad V_{f \cdot g} \leq AV_f + BV_g,$$

en donde

$$A = \sup \{|g(x)| : x \in [a, b]\}, \qquad B = \sup \{|f(x)| : x \in [a, b]\}.$$

Demostración. Sea $h(x) = f(x)g(x)$. Para cada partición P de $[a, b]$ se tiene

$$\begin{aligned} |\Delta h_k| &= |f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})| \\ &= |[f(x_k)g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_k)] \\ &\qquad + [f(x_{k-1})g(x_k) - f(x_{k-1})g(x_{k-1})]| \leq A|\Delta f_k| + B|\Delta g_k|. \end{aligned}$$

Esto implica que h es una función de variación acotada y que $V_h \leq AV_f + BV_g$. Las demostraciones correspondientes a la suma y la diferencia son muy simples y las omitiremos.

Esto significa que $D(y) - D(x) \geq 0$, y (ii) se verifica.

NOTA. Para ciertas funciones f, la variación total $V_f(a, x)$ se puede expresar como una integral. (Ver ejercicio 7.20.)

6.7. FUNCIONES DE VARIACIÓN ACOTADA EXPRESADAS COMO DIFERENCIA DE DOS FUNCIONES CRECIENTES

La simple y elegante caracterización de las funciones de variación acotada que damos a continuación es consecuencia del teorema 6.12.

Teorema 6.13. *Sea f definida sobre $[a, b]$. Entonces f es de variación acotada en $[a, b]$ si, y sólo si, f puede expresarse como diferencia de dos funciones crecientes.*

Demostración. Si f es de variación acotada en $[a, b]$, podemos escribir $f = V - D$, en donde V es la función del teorema 6.12 y $D = V - f$. Tanto V como D son funciones crecientes en $[a, b]$.

El recíproco se deduce inmediatamente de los teoremas 6.5 y 6.9.

La representación de una función de variación acotada como diferencia de dos funciones crecientes no es única. Si $f = f_1 - f_2$, en donde f_1 y f_2 son crecientes, se tiene también que $f = (f_1 + g) - (f_2 + g)$, siendo g una función creciente arbitraria, y ello nos proporciona una nueva representación de f. Si g es *estrictamente* creciente, también lo serán $f_1 + g$ y $f_2 + g$. Por consiguiente, el teorema 6.13 es asimismo válido si reemplazamos «creciente» por «estrictamente creciente».

6.8 FUNCIONES CONTINUAS DE VARIACIÓN ACOTADA

Teorema 6.14. *Sea f una función de variación acotada en $[a, b]$. Si $x \in (a, b]$, sea $V(x) = V_f(a\ x)$ y hagamos $V(a) = 0$. Entonces cada punto de continuidad de f también es un punto de continuidad de V. El recíproco también es cierto.*

Demostración. Puesto que V es monótona, los límites laterales por la derecha y por la izquierda $V(x+)$ y $V(x-)$ existen para cada punto x de (a, b). En virtud del teorema 6.13, lo mismo es cierto para $f(x+)$ y $f(x-)$.

Si $a < x < y \leq b$, se verifica [por definición de $V_f(x, y)$] que

$$0 \leq |f(y) - f(x)| \leq V(y) - V(x).$$

Haciendo que $y \to x$, obtenemos

$$0 \leq |f(x+) - f(x)| \leq V(x+) - V(x).$$

Análogamente, $0 \leq |f(x) - f(x-)| \leq V(x) - V(x-)$. Estas desigualdades implican que todo punto de continuidad de V es también un punto de continuidad de f.

Para demostrar el recíproco, sea f continua en un punto c de (a, b). Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $0 < |x - c| < \delta$ implica $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/2$. Para este mismo ε, existe una partición P de $[c, b]$, por ejemplo

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \qquad x_0 = c, \quad x_n = b,$$

tal que

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k|.$$

Agregando más puntos a P únicamente conseguiremos que aumente la suma $\sum |\Delta f_k|$ y por lo tanto podemos considerar que $0 < x_1 - x_0 < \delta$. Esto significa que

$$|\Delta f_1| = |f(x_1) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

con lo que la desigualdad anterior se convierte en

$$V_f(c, b) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=2}^{n} |\Delta f_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + V_f(x_1, b),$$

ya que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[x_1, b]$. Tenemos, por tanto,

$$V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon.$$

Pero

$$\begin{aligned} 0 \leq V(x_1) - V(c) &= V_f(a, x_1) - V_f(a, c) \\ &= V_f(c, x_1) = V_f(c, b) - V_f(x_1, b) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Con lo cual hemos probado que

$$0 < x_1 - c < \delta \quad \text{implica} \quad 0 \leq V(x_1) - V(c) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $V(c+) = V(c)$. Un razonamiento análogo lleva al resultado $V(c-) = V(c)$. El teorema queda entonces demostrado para todos los puntos interiores de $[a, b]$. (Para los puntos extremos son necesarias ciertas modificaciones triviales.)

Combinando el teorema 6.14 con el 6.13, podemos establecer

Teorema 6.15. *Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces f es variación acotada en $[a, b]$ si, y sólo si, f se puede expresar como diferencia de dos funciones crecientes continuas.*

NOTA. El teorema se verifica también si reemplazamos «creciente» por «estrictamente creciente».

Es claro que las discontinuidades de una función de variación acotada (si existen) deberán ser discontinuidades de salto en virtud del teorema 6.13. Además, el teorema 6.2 nos dice que constituyen un conjunto numerable.

6.9 CURVAS Y CAMINOS

Sea $\mathbf{f}:[a, b] \to \mathbf{R}^n$ una función vectorial, continua en un intervalo compacto $[a, b]$ de $\mathbf{R}$. Cuando t recorre $[a, b]$, los valores $\mathbf{f}(t)$ de la función describen un conjunto de puntos de $\mathbf{R}^n$ llamado *gráfica* de $\mathbf{f}$ o *curva* descrita por $\mathbf{f}$. Una curva es un subconjunto compacto y conexo de $\mathbf{R}^n$ dado que es la imagen continua de un intervalo compacto. La función $\mathbf{f}$ se llama un *camino.*

Es a veces útil imaginarse una curva como trazada por una partícula móvil. El intervalo $[a, b]$ puede ser interpretado como un intervalo de tiempo y el vector $\mathbf{f}(t)$ determina la posición de la partícula en el instante t. En esta interpretación, la función $\mathbf{f}$ se denomina un *movimiento.*

Distintos caminos pueden dibujar la misma curva. Por ejemplo, las dos funciones complejas

$$f(t) = e^{2\pi it}, \qquad g(t) = e^{-2\pi it}, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

dibujan ambas el círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$, pero los puntos son recorridos en sentidos opuestos. El mismo círculo lo dibuja cinco veces la función $h(t) = e^{10\pi it}$, $0 \leq t \leq 1$.

6.10 CAMINOS RECTIFICABLES Y LONGITUD DE UN ARCO

A continuación introducimos el concepto de longitud de un arco de curva. La idea consiste en aproximar la curva por medio de polígonos inscritos, técnica aprendida de los antiguos geómetras. Nuestra intuición nos asegura que la longitud de cualquier polígono inscrito no excederá a la de la curva (dado que la línea recta es el camino más corto entre dos puntos), luego la longitud de una curva deberá ser una cota superior de las longitudes de todos los polígonos inscritos. Por consiguiente, parece natural definir la longitud de una curva como el extremo superior de las longitudes de todos los polígonos inscritos posibles.

Para la mayoría de las curvas que aparecen en la práctica, esto proporciona una definición útil de longitud de arco. Sin embargo, como veremos en seguida, existen curvas para las cuales el extremo superior de las longitudes de los polígonos inscritos *no* existe. Por tanto, es necesario clasificar las curvas en dos categorías: las que tienen longitud y las que no. Las primeras se denominan *rectificables,* las segundas *no rectificables.*

Daremos ahora una descripción formal de estas ideas.

Sea $\mathbf{f}:[a, b] \to \mathbf{R}^n$ un camino en $\mathbf{R}^n$. Para una partición cualquiera de $[a, b]$, dada por

$$P = \{t_0, t_1, \dots, t_m\},$$

los puntos $\mathbf{f}(t_0)$, $\mathbf{f}(t_1)$, ..., $\mathbf{f}(t_m)$ son los vértices de un polígono inscrito. (Puede verse un ejemplo en la figura 6.1.) La longitud de este polígono la designaremos por $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ y se define como la suma

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(P) = \sum_{k=1}^{m} \|\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{f}(t_{k-1})\|.$$

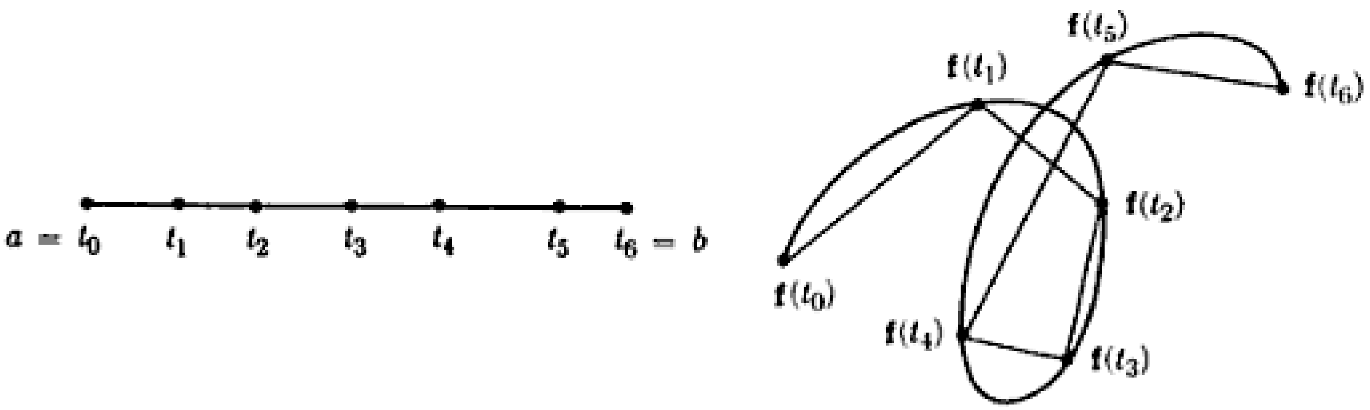


Figura 6.1

Definición 6.16. *Si el conjunto de números $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ está acotado para todas las particiones P de $[a, b]$, entonces el camino $\mathbf{f}$ se llama rectificable y su longitud de arco, designada por $\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b)$, se define por*

$$\Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) = \sup \{\Lambda_{\mathbf{f}}(P) : P \in \mathscr{P}[a, b]\}.$$

Si el conjunto de números $\Lambda_{\mathbf{f}}(P)$ no está acotado, $\mathbf{f}$ se llama no rectificable.

Existe un método fácil para caracterizar todas las curvas rectificables.

Teorema 6.17. *Consideremos un camino $\mathbf{f}:[a, b] \to \mathbf{R}^n$ de componentes $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. Entonces $\mathbf{f}$ es rectificable si, y sólo si, cada componente f_k es de variación acotada en $[a, b]$. Si $\mathbf{f}$ es rectificable, tenemos las desigualdades*

$$V_k(a, b) \le \Lambda_{\mathbf{f}}(a, b) \le V_1(a, b) + \cdots + V_n(a, b), \qquad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{2}$$

T. M. Apostol

Análisis Matemático

Segunda edición

ISBN 84-291-5004-8

9 788429 150049

EDITORIAL REVERTÉ S.A.
www.reverte.com